ALEXANDER NIKLITSCHEK

IM ZAUBERGARTEN DER MATHEMATIK

Neu bearbeitet von Dipl.-Math. Kurt Wullschläger

Mit 104 Zeichnungen im Text

STUTTGARTER HAUSBUCHEREI

Vorwort

Es war in einem überfüllten Wartesaal eines Bahnhofs in einer großen Stadt. Drei „Eisenbahner“ jüngeren Alters saßen - offensichtlich nach getaner Arbeit - vor ihrem Glas Bier und erwarteten den Zug, der sie nach Hause bringen sollte.

Ein alltägliches Bild, wie man es ähnlich in jeder Stadt zu sehen bekommt. Und dennoch, hier war etwas besonderes dabei! Es war die Unterhaltung, die diese drei Menschen miteinander führten. Wieso kommt es, dass beim Rechnen — in diesem Gespräch ging es um das logarithmische Rechnen — etwas Positives herauskommt, wenn eine negative Zahl zu subtrahieren ist? - Bemerkenswert an dieser kleinen Begebenheit ist, dass ein mathematisches Problem überhaupt als solches erkannt und nicht nur einfach so hingenommen wurde. Diese Tatsache möge zeigen, wie unabhängig die Aufnahmefähigkeit für mathematische Gedankengänge von den bildungsmäßigen Voraussetzungen ist. Die weit verbreitete Ansicht, die Mathematik sei für die meisten „viel zu hoch“, erscheint in diesem Zusammenhang nicht recht verständlich. Um Freude an mathematischen Problemen zu finden, benötigt man keine strengen Lektionen als Vorbereitung. Auch Reiseberichte werden ja nicht nur von Geographen gelesen und verstanden.

Leider geht den meisten „schlummernden Talenten“ im allgemeinen sehr schnell der Stoff aus! Ihnen weitere Anregungen zu geben, war einer der Leitgedanken, die Alexander Niklitschek bewogen haben, seinen „Zaubergarten der Mathematik“ zu schreiben. Er wollte darüber hinaus etwas von jener Begeisterung vermitteln, die ihn packte, als er die „strahlende Pracht des großartigen Gedankengebäudes der Mathematik“ - so sprach er es aus - staunend erkannt hatte.

Die vorliegende 8. Auflage seines Buches hat er leider nicht mehr erleben dürfen. - Als neuer Bearbeiter musste ich hier und da den Standort ändern, von dem aus Alexander Niklitschek seinen „Zaubergarten“ betrachtete, daher habe ich im Zuge der textlichen Neugestaltung einigen Problemen ein anderes Gewicht beigemessen.

Der geschickte Gesamtaufbau aber ist unverändert geblieben. Ich habe mich dabei bemüht, die schöne Gedankenführung von der Tangensfunktion über die Tangente zur Differentialrechnung noch stärker in den Vordergrund zu stellen.

So! Und nun wollen wir — mit Alexander Niklitschek — spazieren gehen!

Braunschweig, im September 1956.

KURT WULLSCHLÄGER

In der kurzen Zeit von 20 Monaten wurden drei neue Auflagen notwendig, ein Zeichen dafür, dass die Beliebtheit dieser inzwischen in fünf Fremdsprachen übersetzten „populären Mathematik“ anhält. Der Verlag dankt allen Lesern für ihr Interesse und hofft, dass der Freundeskreis noch ständig wachsen wird.

Berlin, im Frühjahr 1958

DER VERLAG

Vorwort zur Wiederauflage 2001

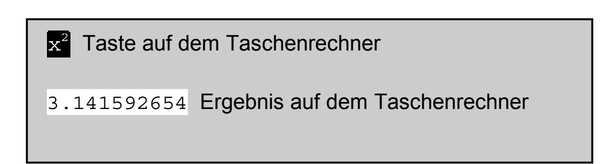
Das Buch wurde vor dem 2. Weltkrieg geschrieben – zu einer Zeit also, als der moderne Taschenrechner noch nicht einmal in Science Fiction Romanen auftauchte; statt dessen waren Rechenschieber und Logarithmentafeln damals „moderne Hilfsmittel“ der Mathematik.

Beides braucht man im Zeitalter des **Taschenrechners** nicht mehr — heute genügen zwei Tastendrücke auf einem Taschenrechner für 20 DM oder sogar weniger, um z. B. den log 3 = 0,477 12 12 54 auf 10 Stellen genau anzeigen zu lassen.

Die Ausführungen über die Logarithmentafeln wurden deshalb durch eine entsprechende Anleitung für den Umgang mit dem Taschenrechner ersetzt; das Kapitel über den Rechenschieber wurde gestrichen.

Alle Beispiele für den Umgang mit dem Taschenrechner wurden mit einem CASIO *fx-82SOLAR* erstellt.

Zeichenerklärung für die Taschenrechner-Beispiele



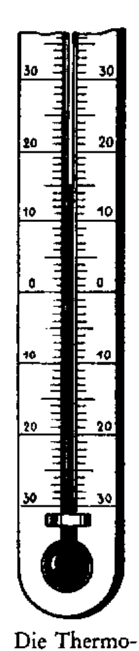
Wo uns der Spaziergang hinführt:



Das Geheimnis des Thermometers

Nichts will so genau überlegt und erwogen sein wie die Frage, auf welchem Wege, durch welches Tor wir in das vor uns liegende Gebiet eindringen sollen. Ich denke, dass wir da getrost schon etwas als bekannt und selbstverständlich voraussetzen können: Das Wissen von den Zahlen. Jenes Wissen, das den Menschen von seinem ersten Schultage an ins ganze weitere Leben begleitet.

Natürlich wollen und dürfen wir die Zahlen nicht kunterbunt durcheinander vor uns antreten lassen. Ordnung muss sein! Wir können uns zum Beispiel einen Metermaßstab zum Vorbild nehmen, auf dem die Zahlen — allerdings nur in beschränkter Anzahl — hübsch in der Reihenfolge nach ihren Werten von Null an aufmarschiert sind. Aber wir wollen noch genauer sein, indem wir statt des Metermaßstabes ein **Thermometer** nehmen.



Die Thermometerskala

Warum? — Das werden wir gleich sehen!

So eine Thermometerskala unterscheidet sich von einem Metermaß, mit dem sie ja durchaus wesensverwandt ist, denn doch einigermaßen, nämlich durch ihren **Nullpunkt**. Das Metermaß hat zwar auch einen Punkt, der mit Null bezeichnet ist, aber von diesem Punkt geht es nur nach einer Richtung hin, nämlich über 10, 20, 30 usw. bis zu 100 oder 200 cm, je nach der Länge des Metermaßstabes. Anders beim Thermometer. Da liegt die Null in der **Mitte**. Nach aufwärts werden die „Plusgrade" (+) gemessen, abwärts vom Nullstrich die „Minusgrade" (-). Fällt die Quecksilbersäule unter Null, so „friert" es, klettert sie dagegen über Null hinaus, so gibt es „Wärme", um uns ganz landläufig und allgemeinverständlich auszudrücken, wenn es auch physikalisch nicht ganz genau ist.

Gerade diese Zweiteilung, das Hinauswachsen der Zahlen nach zwei entgegengesetzten Richtungen, ist es, was wir brauchen. Denn in der Mathematik gibt es, wie wohl die meisten wissen, **positive** und **negative** Zahlen, die sich zueinander genau so verhalten wie die Wärme- und Kältegrade des Thermometers. Davon sei jetzt ein wenig genauer die Rede.

Der erste grundlegende Unterschied vom gewöhnlichen Sprachgebrauch, den wir uns einprägen müssen, ist der, dass das + - oder das – - Zeichen, sonst die Rechenbefehle für „zuzählen" und „abziehen", hier mit der Zahl selbst wie verwachsen erscheinen. Es gibt in der Mathematik eben ein – 9 (sprich „minus neun"), das von + 9 (sprich „plus neun") ebenso grundverschieden ist wie 9 Grad über Null von 9 Grad unter Null am Thermometer. Auch eine andere im normalen wie mathematischen Sprachgebrauch eingerissene Oberflächlichkeit wollen wir uns hier gleich merken. Neun schlechthin ist einfach + 9, genau so wie es eigent-

lich selbstverständlich ist, dass wir unter 12 Grad „+12 Grad“, also 12 Wärmegrade, verstehen.

Nun aber zu unserer Thermometerskala und ein klein wenig von den Rechengesetzen der positiven und negativen Zahlen auf dieser Teilung, die ganz abstrakt und für sich allein gedacht in der Mathematik den Namen „**Zahlengerade**“ führt.

Fassen wir einmal den Wert von 10 Wärmegraden ins Auge. Nun soll die Temperatur um 9 Grad steigen; wir haben dann 19 Grad Wärme. Sinkt aber die Temperatur um sagen wir 18 Grad, so ergibt das logischerweise 8 Grad Kälte. Und genauso wie hier bei den Wärmegraden verhält es sich mit Subtraktion und Addition von positiven und negativen Zahlen. 10 - 23 = - 13, wogegen – 20 + 40 = + 20 ergibt und so fort. Setzen wir für alles „**Positive**“ etwa Geld, das wir besitzen oder das uns zukommt, und für alles „**Negative**“ zu leistende **Zahlungen** oder **Schulden**, so bekommen wir ein handgreifliches, jedermann verständliches Bild von dem Hin und Her und Auf und Ab im Positiven wie im Negativen. Wer 100 DM hat

-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7

Die Zahlengerade

und davon 99 DM ausgibt, trägt nur mehr 1 DM in der Tasche. Dagegen wird derjenige, der mit 10 DM ausging und für 25 DM Zeche machte, nun unbedingt irgendwo mit 15 DM in der Kreide stecken.

Lauter Selbstverständlichkeiten, nüchterne Binsenwahrheiten, nicht wahr? Aber nur gemach! Schon jetzt heißt es, ein wenig aufpassen; denn wir werden gleich einen ersten Eindruck von der reizvollen mathematischen Vorstellungswelt bekommen!

Bevor wir uns an neue Probleme heranwagen, wollen wir noch eine Schreibweise einführen, die sich als zweckmäßig erweisen wird. Wir wollen die Zahlen mit ihrem Plus- oder Minuszeichen in Klammern setzen, damit wir die Vorzeichen der Zahlen von den Rechenzeichen der Addition und Subtraktion unterscheiden können. So schreiben wir z.B. für die positive Zahl 9 jetzt (+ 9) und für die negative Zahl – 7 entsprechend (– 7). Wir haben sozusagen — um ein anschauliches Bild zu gebrauchen — die Zahlen mit ihren Vorzeichen in Schachteln gepackt. Wenn wir nun die Aufgabe (– 13) + (+ 23) rechnen wollen, dann müssen wir natürlich die Zahlen wieder auspacken. Das heißt mathematisch ausgedrückt, wir müssen die Klammern auflösen. Wie man das macht, erkennen wir, wenn wir die Aufgabe in Worten aussprechen und wie bisher lösen: Die positive Zahl + 23 soll zu der negativen Zahl – 13 addiert werden. Das Ergebnis ist + 10. Also

$$(-13) + (+23) = -13 + 23 = +10.$$

$+ \cdot (+) = +$

Wir merken uns: Aus dem Rechenzeichen „Plus“ vor der Klammer und dem Vorzeichen „Plus“ in der Klammer wird das Rechenzeichen „Plus“.

Subtrahieren wir von der positiven Zahl + 36 die positive Zahl + 16, dann erhalten wir + 20.

$$(+36) - (+16) = +36 - 16 = +20.$$

$- (+) = -$

Rechenzeichen „Minus“ vor der Klammer und Vorzeichen „Plus“ in der Klammer ergeben das Rechenzeichen „Minus“.

Dem voreiligen Leser sei verraten, dass wir die Klammern nicht eingeführt haben, um etwa nur eine einfache Sache kompliziert auszudrücken. Die Lösung der Aufgabe „Addiere zu der positiven Zahl + 36 die negative Zahl – 16“ ist z. B. schon nicht mehr so ganz selbstverständlich. Doch machen wir uns die Aufgabe am besten wieder anschaulich klar: Jemand hat 36DM in der Tasche, dazu kommen 16 DM Schulden. Der Betreffende besitzt demnach nur 20 DM.

$$(+36) + (-16) = +36 - 16 = +20.$$

$+(-) = -$	Rechenzeichen „Plus“ vor der Klammer und Vorzeichen „Minus“ in der Klammer ergeben das Rechenzeichen „Minus“.

Beispiele: $(+17) + (+16) = +17 + 16 = +33$

$(-12) - (+35) = -12 - 35 = -47$

$(-25) + (-25) = -25 - 25 = -50$

Das letzte Beispiel legt die Frage nahe: Was ist $(-25) - (-25)$?

Zunächst sieht das etwas schwierig aus; stellen wir uns aber die Klammern als Schachteln vor, dann wird alles wieder ganz einfach. Wir haben zwei Schachteln mit gleichem Inhalt. Ziehen wir den Inhalt der einen Schachtel von dem Inhalt der anderen Schachtel ab, dann bleibt nichts mehr übrig. Es ist also

$$(-25) - (-25) = 0.$$

Genauso wie $-25 + 25 = 0$ ist. Entsprechend können wir z.B. auch die Aufgabe lösen, von der negativen Zahl – 36 die negative Zahl – 23 abzuziehen.

$$(-36) - (-23) = -36 + 23 = -13.$$

Ein anschauliches Beispiel hierzu: Jemand hat 36 DM Schulden. Werden ihm 23 DM Schulden erlassen, dann hat er eben nur noch 13 DM Schulden.

$-(-) = +$	Rechenzeichen „Minus“ vor der Klammer und Vorzeichen „Minus“ in der Klammer ergeben das Rechenzeichen „Plus“.

Wir wollen das auch gelten lassen, wenn wir negative von positiven Zahlen abzuziehen haben, z. B.

$$(+25) - (-15) = +25 + 15 = 40.$$

Das folgt aber nicht unbedingt aus unseren vorhergehenden Betrachtungen, wenn auch der Leser diese Lösung fast als selbstverständlich hinnehmen wird. So selbstverständlich ist das gar nicht! Zum Beispiel versagt in diesem Fall die Veranschaulichung der Aufgabe mit Hilfe der Schulden. Wenn jemand 25 DM in der Tasche hat und bekommt 15 DM Schulden erlassen, dann hat er nach wie vor nur 25 DM. Genau so versagt auch das Thermometer. Ziehe von 25° „Wärme“ 15° „Kälte“ ab! — Es ist nicht einzusehen, warum es dann 15° wärmer werden sollte.

Der Leser möge sich nicht verwirren lassen. Ein Bild entspricht eben nie genau der Wirklichkeit und man sollte daher nicht versuchen, in einem Bild mehr finden zu wollen, als es zeigen kann.

Und nun kommt eine kleine Überraschung: Diese von uns so anschaulich entwickelten Rechenregeln lassen sich mathematisch gar nicht beweisen.

Um das einigermaßen verstehen zu können, wollen wir uns etwas genauer mit dem allgemeinen Begriff „**Zahl**" beschäftigen.

In ihrer ursprünglichen Bedeutung sind die Zahlen Bezeichnungen für Anzahlen. Gleichartige Gegenstände (z. B. Bücher, Seiten, Stühle, Hühner usw.) werden gezählt, um ihre Anzahl festzustellen. Das ist die natürliche Anwendung der Zahlen. Wir zählen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Mit diesen „**natürlichen Zahlen**" kann man jede beliebige Additionsaufgabe lösen; z. B.

$$3 + 4 = 7; \quad 47 + 32 = 79; \quad 2 + 1 = 3 \text{ usw.}$$

Das Ergebnis ist immer wieder eine natürliche Zahl (7; 79; 3).

Bei der Subtraktion machen wir die etwas merkwürdige Feststellung, dass wir nicht beliebig subtrahieren können. Es gibt Aufgaben, die sich mit unseren natürlichen Zahlen allein einfach nicht lösen lassen. Was ist z.B. 3–3,1–2,13-24? Wir wissen natürlich" was da herauskommt, doch fragen wir einen Schüler der ersten Grundschulklassen, dann wird dieser verständnis1os dreinschauen und sagen: „Das geht gar nicht!" — Und damit hat er völlig recht! Man muss schon die Zahl Null und die negativen Zahlen als neue Zahlen einführen, um die Ergebnisse angeben zu können:

$$3 - 3 = 0; \quad 1 - 2 = -1; \quad 13 - 24 = -11.$$

Diese „Erfindungen" lassen sich mathematisch definieren, aber nicht beweisen, doch ist die Einführung dieser Zahlen deshalb keineswegs willkürlich: Man muss mit ihnen auch sinnvoll rechnen können. Insbesondere treten diese neuen Zahlen ja nicht nur allein, sondern auch zusammen mit den natürlichen Zahlen auf und dabei dürfen sich beim Rechnen keine Widersprüche ergeben. Sie müssen sich also in die Rechenregeln der natürlichen Zahlen einordnen lassen. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, dann spricht man von einer Erweiterung des Zahlbegriffs. Das heißt: Die neuen Zahlen (0, – 1, – 2, – 3, ...) sind gleichberechtigt in die „Zahlenfamilie" aufgenommen worden. Innerhalb dieser Familie unterscheiden wir also jetzt die positiven Zahlen, die Zahl Null und die negativen Zahlen. Alle zusammen haben den Namen „**relative Zahlen**".

Wir werden noch andere Erweiterungen des Zahlbegriffs kennen lernen. Immer ist es dabei das g1eiche Prinzip, das uns bei der Einführung neuer Zahlen begegnet: Die Rechengesetze der bereits bekannten Zahlen sollen auch gemeinsam mit den neuen Zahlen gelten. Man nennt dieses Prinzip das **Permanenzprinzip**[1)].

Eine zweite Erweiterung soll nur kurz erwähnt werden. Die Einführung der gebrochenen Zahlen oder Brüche, wie sie im allgemeinen genannt werden. Ihre Einführung ergibt sich aus

[1)] So bezeichnet von Hermann Hankel (1839 - 1873), Mathematiker in Erlangen; permanere (lat.), verbleiben.

der Tatsache, dass es beim Teilen (Division) auch Aufgaben gibt, die nicht „aufgehen“. So hat z. B. die Aufgabe 2 : 3 zunächst keinen Sinn, weil es keine ganze Zahl gibt, die man als Lösung angeben kann. Mit der Festsetzung

$$2 : 3 = \frac{2}{3}$$

wird der Bruch $\frac{2}{3}$ als neue Zahl eingeführt. Das ist so selbstverständlich“ dass wir gar keinen Unterschied mehr zwischen dem Rechenzeichen **:** und dem Bruchstrich machen. Die Gesamtheit der ganzen und gebrochenen positiven und negativen Zahlen nennt man „**rationale Zahlen**“.

Eine kleine Ruhepause dürfte uns jetzt gut tun. Unser Weg in den Zaubergarten der Mathematik, der so harmlos begann, hat uns bereits nach den ersten Schritten gezeigt, dass man nicht lange zu suchen braucht, um die Schönheit des Gartens zu entdecken. An jeder einzelnen Blume, die am Wege steht, können wir uns erfreuen. Dabei ist es gar nicht so wichtig, dass wir nun alle Einzelheiten genau untersuchen. Es ist wie in einem Rosengarten: Wir erfreuen uns an der Pracht der Blüten, ohne danach zu fragen, wie etwa die Wurzeln aussehen mögen. Das überlassen wir dem Gärtner. Auch die von ihm sorgfältig angebrachten Schildchen mit den meist lateinischen Bezeichnungen interessieren uns nur am Rande. Die haben wir ohnehin bald wieder vergessen. Doch nun weiter.

Zunächst müssen wir noch einiges über die Multiplikation (Malnehmen) und Division (Teilen) positiver oder negativer Zahlen erfahren. Hier liegen die Dinge schon nicht mehr so ganz einfach. Schon die so harmlos aussehende Frage, wie viel 10 mal (– 4) sei, ist für den Nichtmathematiker eine harte Nuss. Allein unser vorhin erwähnter Vergleich mit Einkommen und Schulden hilft uns auch über diese Klippe hinweg. Negative Zahlen (Minuszahlen) sind eben Schulden oder Ausgaben gleichzusetzen. Und wenn ich zehnmal je 4 DM Schulden gemacht habe, so bin ich im ganzen 40 DM schuldig. Zu dem gleichen Ergebnis kommen wir durch das Studium unserer Thermometerskala. Jedes **Steigen** der Temperatur muss hier offenbar als „**positiv**“ und jedes **Fallen** als „**negativ**“ gelten. Und ist das Thermometer zehnmal hintereinander um je vier Grad gefallen, so ist es klarerweise um vierzig Grad **kälter** geworden! Damit haben wir die hier gültige Regel gefunden. Sie lautet:

Jede **positive** Zahl, multipliziert mit einer **negativen** , ergibt ein **negatives** Produkt!

Und da die Division ja nur die Umkehrung der Multiplikation vorstellt, so gilt auch:

Jede **negative** Zahl dividiert durch eine **positive** — oder umgekehrt — ergibt einen **negativen** Quotienten[1)].

Wenn ich 100 DM Gesamtschulden habe und diesen betrüblichen Posten in zwanzig Einzelposten zerlege, so habe ich eben 20 mal je 5 DM Schulden. Aber niemals bares, „positives“ Geld! Eine Erkenntnis, die dem Leser gewiss ohne weiteres verständlich ist.

Aber jetzt kommt die schwierige Frage, die schon nicht mehr so klipp und klar auf Anhieb zu beantworten ist. Nämlich die Frage: Was ergeben zwei negative Zahlen miteinander

[1)] Quotient nennt man das **Ergebnis** der Division.

multipliziert? 2 mal 2 ist bekanntlich 4, und 2mal (– 2) ergibt, wie wir eben sahen, (– 4); was aber kommt heraus, wenn man (– 2) mal (– 2) multipliziert? Die Hauptschwierigkeit, die sich bei dieser Frage ergibt, liegt darin, dass es in diesem Fall nicht möglich ist, die mathematische Forderung in die „bürgerliche Umgangssprache“ zu übersetzen. Doch darüber brauchen wir uns nicht zu wundern, denn auch bei der Subtraktion negativer Zahlen sind wir auf die gleiche Schwierigkeit gestoßen. In der Tat besteht da ein Zusammenhang.

So ist zum Beispiel

$$(+3) \cdot (+4) = (+4) + (+4) + (+4) = +12$$ [1)]

Die Multiplikation kann also als eine Addition mit jeweils gleichen Zahlen (Summanden) aufgefasst werden. Drei mal plus vier heißt also: Addiere dreimal die Zahl + 4. Entsprechend ist auch

$$(+3) \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12.$$

Wir sehen also, dass die uns von der Addition und Subtraktion relativer Zahlen bekannten Rechenregeln für die Multiplikation ganz entsprechend gelten:

$$\boxed{(+) \cdot (-) = -} \qquad \boxed{(+) \cdot (+) = +}$$

Demzufolge verabreden wir, dass auch

$$\boxed{(-) \cdot (+) = -} \qquad \boxed{(-) \cdot (-) = +}$$

sein soll. Also

$$(-3) \cdot (-4) = +12; \qquad (-3) \cdot (-4) = +12.$$

Wir vermerken insbesondere die überraschende Tatsache:
Zwei negative Zahlen miteinander multipliziert, ergeben ein **positives** Produkt!

Wem diese Geschichte unglaubwürdig vorkommt, dem wollen wir hier noch ein kleines Beispiel aus der Sprachlehre vorlegen.

Die streng logisch aufgebaute lateinische Sprache fasst zwei Verneinungen als Bejahung, und zwar als **verstärkte** Bejahung auf — zwei negative Aussagen ergeben eine verstärkte positive. Man erinnere sich nur an die bekannte höhnische Grabschrift:

Sit tibi terra levis mollique tegaris harena,
Ne tua non possint eruere ossa canes!

Das heißt wörtlich übersetzt: „Sei Dir die Erde leicht und weich die Dich deckende Sandschicht, dass **nicht** die Hunde Deine Knochen **nicht** ausgraben können!“ Sinngemäß übersetzt heißt der zweite Vers: „dass Deine Knochen nur ja alle Hunde erreichen!“, wodurch erst der fromme Wunsch fürs Jenseits seinen bitter-höhnischen Sinn bekommt.

[1)] Wir verwenden für das Rechenzeichen „mal“ den Malpunkt. Früher war auch das x üblich.

Genau so machen wir's im Deutschen. Auch wir bezeichnen mit „nicht schlecht" etwas, das besser ist als gut, eine „nicht geringe" Geschwindigkeit bedeutet schon ein flottes Tempo, und einer, der „sich nicht lumpen lässt", ist alles andere eher als ein Filz und Geizkragen. Es gilt also auch in der Sprachlehre der Satz, dass zwei Negationen, zwei negative Aussagen einander zu einer Bejahung ergänzen — eine schöne Parallele zu unserer mathematischen Erkenntnis!

Aber zurück zur Mathematik! Wir haben da noch manches nachzutragen. Vor allem gilt es wieder festzuhalten, dass auch die Division zweier negativer Zahlen genau so vor sich geht wie die Multiplikation: Das Ergebnis ist immer positiv. Warum? Das ist hier merkwürdigerweise überraschend leicht einzusehen. Es geht aus der Forderung hervor, dass eine negative Zahl mal einer positiven etwas Negatives ergeben muss. Es gilt also ganz einfach

$$(-35) : (-5) = +7.$$

Und in der Tat ist $(-5) \cdot (+7) = -35$.

Die Multiplikation des Ergebnisse der Division mit der Zahl, durch die geteilt wurde (Teiler), ist übrigens stets eine recht nützliche Probe.

So! Und um noch einmal alles schön zu wiederholen und das Gesagte zusammenzufassen, wollen wir das allbekannte Einmaleins in unserer mathematisch erweiterten Form niederschreiben.

(+ 1) · (+ 1) = + 1	(+ 2) · (+ 2) = + 4	(+ 3) · (+ 3) = + 9
(+ 1) · (– 1) = – 1	(+ 2) · (– 2) = – 4	(+ 3) · (– 3) = – 9
(– 1) · (+ 1) = – 1	(– 2) · (+ 2) = – 4	(– 3) · (+ 3) = – 9
(– 1) · (– 1) = + 1	(– 2) · (– 2) = + 4	(– 3) · (– 3) = + 9

usw.

Dabei wollen wir uns auch noch die entsprechenden Verhältnisse bezüglich des „P1us" und „Minus" für die Division ins Gedächtnis zurückrufen:

(+ 1) : (+ 1) = + 1	(+ 4) : (+ 2) = + 2	(+ 9) : (+ 3) = + 3
(– 1) : (– 1) = + 1	(– 4) : (– 2) = + 2	(– 9) : (– 3) = – 3
(– 1) : (+ 1) = – 1	(– 4) : (+ 2) = – 2	(– 9) : (+ 3) = – 3
(+ 1) : (– 1) = – 1	(+ 4) : (– 2) = + 2	(+ 9) : (– 3) = + 3

usw.

Soviel über das Rechnen mit relativen Zahlen. Die Klammern, die uns nützliche Helfer bei der Ableitung der Rechenregeln waren, haben ihren Dienst getan! Wir wollen sie künftig nur dann noch verwenden, wenn der Zusammenhang damit klarer wird.



Von einer Zahl, die nur in der Einbildung lebt

Jedem werden wohl schon während der ersten Volksschuljahre jene eigenartigen Rechnungen aufgefallen sein, bei denen die gleiche Zahl mit sich selbst multipliziert wird, wie etwa $3 \cdot 3 = 9$, $6 \cdot 6 = 36$ usw. Es sind auch tatsächlich wundersame Multiplikationen! Diese sonderbaren Produkte heißen **Potenzen**. Man sagt

$3 \cdot 3 = 9$	ist die zweite	Potenz von 3[1)]
$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$	ist die dritte	Potenz von 3
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$	ist die vierte	Potenz von 3
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$	ist die fünfte	Potenz von 3

. . . .

und so geht das lustig weiter.

Natürlich kann man, wenn es Spaß macht oder bei irgendeiner Rechnung nötig ist, z. B. auch 38. Potenzen irgendwelcher Zahlen ausrechnen. Kurz, es geht auch mit dieser Rechnerei frisch und fröhlich ins Ungemessene und Unbegrenzte, je nach Geschmack und Belieben!

Jetzt wird der Leser etwas entsetzt sein! — 38. Potenz von 7? Wie soll man das überhaupt hinschreiben? Das ist doch eine umständliche Sache.

Nur Geduld, lieber Leser, das ist halb so schlimm. Für „38. Potenz von 7“ schreibt man einfach 7^{38} (sprich: „7 hoch 38).

Die kleine hochgeste1lte 38, die **Hochzahl** (Exponent), gibt also an, wie oft man die Grundzahl 7 hinschreiben muss, um die Potenz zu bilden.

Demnach ist z. B. $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ usw.

Auch die Geschichte mit dem **Plus**- und **Minus**-Zeichen braucht uns hier weiter nicht aufzuregen. Denn jede „Multiplikation mit sich selbst“, d.h. jede **Potenzierung**, kann als normale, fortgesetzte Multiplikation aufgefasst werden.

[1)] Für den Ausdruck „zweite Potenz“ benutzt man häufig auch die Bezeichnung „**Quadrat**“.

Allerdings gibt es da eine kleine Groteske. Schauen wir nämlich einmal nach, was herauskommt, wenn man zum Beispiel die Grundzahl – 2 fortgesetzt mit sich selbst multipliziert:

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$$

. . . . . .

Wie wir nämlich zu unserer Überraschung erkennen, werden die **geraden** Potenzen immer **positiv**, die ungeraden aber negativ. Die Zahl – 2 dreimal mit sich selbst multipliziert, ergibt - 8, viermal mit sich selbst multipliziert aber + 16! Das Warum ist nach kurzem Nachdenken ganz selbstverständlich. Führt man nämlich die Multiplikationen der Reihe nach aus, so erkennt man ganz von selbst, weswegen das so sein muss: Es wird nämlich abwechselnd einmal ein **negatives** Produkt mit einem **negativen** „Zweier“ multipliziert, was eben ein weiteres **positives** Produkt ergibt; dann aber kommt dieses **positive** Produkt noch einmal mit einem **negativen** Zweier dran; es folgt also wieder ein negatives Produkt und so fort.

Bis hierin ist alles sehr durchsichtig und auch nicht allzu schwierig. Doch die Frage, wie die Grundzahl aussieht, die zu einem gegebenen Wert der Potenz gehört, ist im allgemeinen nicht so leicht zu beantworten.

Für diese Rechnungen hat man das Rechenzeichen „**Wurzel**“ eingeführt. Ist z. B. die Grundzahl gesucht, die viermal mit sich selbst. multipliziert 625 ergibt, so sagt man dafür auch: „Wie lautet die vierte Wurzel aus 625?“ Dafür wird kürzer $\sqrt[4]{625} = ?$ geschrieben. Das Zeichen $\sqrt{}$ bedeutet dabei „Wurzel aus“.

Nun wird der Leser sagen: Das ist doch ganz einfach, denn die Zahl, die viermal mit sich selbst multipliziert 625 ergibt, ist eben 5, denn

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625.$$

Das haben wir ja oben gerade ausgerechnet. Genauso ist auch

$\sqrt[2]{9 = 3}$ [1)] denn $3^2 = 9$ $\quad$ $\sqrt[4]{81 = 3}$ denn $3^4 = 81$

$\sqrt[3]{27 = 3}$ denn $3^3 = 27$ $\quad$ $\sqrt[5]{243 = 3}$ denn $3^5 = 243$

Alles gut und schön, doch viel haben wir damit noch nicht gewonnen. Wir wissen bisher nur, dass sich von einzelnen ganz bestimmten Zahlen die Wurzeln angeben lassen. Vom eigent-

---

[1)] „Zweite Wurzel aus“ nennt man auch „**Quadratwurzel** aus“. Die 2 läßt man i.A. weg. Also nicht $\sqrt[2]{9}$ sondern einfach $\sqrt{9}$.

lichen „Wurzelziehen“ verstehen wir damit noch genau so wenig, wie der Schüler vom Multiplizieren versteht, wenn er gerade das „Einmaleins“ gelernt hat.

Was ist z. B. die Quadratwurzel aus 2? — Da sitzen wir schon fest! Natürlich hat man in der Schule gelernt, wie man das ausrechnet. Doch wer hat das schon behalten? Diese Rechnerei – Wurzelalgorithmus genannt - ist viel zu umständlich, wie wir an folgendem Beispiel erkennen:

```
√2 = 1,41421 . . . .
1
10'0 : 2
 9 6    24 · 4
   40'0 : 28
   28 1    281 · 1
   11 90'0 : 282
   11 29 6    2824 · 4
      60 40'0 : 2828
      56 56 4    28282 · 2
       3 83 60'0 : 28284
       2 82 84 1    282841 · 1
       1 00 75 90'0 : 282842
       . . . usw.
```

Doch, genug des grausamen Spiels! — Das ist wirklich wenig erfreulich. Wir wollen deshalb auch nicht im Einzelnen darauf eingehen. —Und wenn der Leser auch kaum hindurchfinden wird, so mag er sich trösten, wir werden schon bald einfachere Methoden kennen lernen, die zwar nicht ganz so genau sind, die aber für das praktische Rechnen völlig ausreichen. Das ist auch der Grund, warum der Wurzelalgorithmus keine große Bedeutung mehr hat. Er steht im Zaubergarten der Mathematik sozusagen unter Naturschutz ☺.

Eine weitere, schon mehr aufregende Erkenntnis: Wie aus dem Potenzieren positiver und negativer Grundzahlen offenkundig hervorgeht, gibt es auf die so einfache Frage, welche Zahl denn mit sich selbst multipliziert 36 ergibt, nicht eine, sondern **zwei** Antworten, und zwar deswegen, weil **zwei** Zahlen vorhanden sind, die dies können; nämlich + 6 und – 6. Es ist also $\sqrt{6} =$ + 6 und – 6, wie auch $\sqrt{5} =$ + 5 und – 5, $\sqrt{1} =$ + 1 und – 1 usw. Ein und dieselbe Aufgabe hat zwei Lösungen!

Doch es wird noch aufregender. Stellen wir die nach dem bisher Gesagten durchaus logische und berechtigte Frage:

Welche Zahl ergibt einmal mit sich selbst multipliziert zum Beispiel – 4?

Wie sich schon nach kurzem Überlegen herausstellt, stehen, wir vor einer unvermutet aufgetauchten Schwierigkeit. Zum Henker, was kann das für eine Zahl sein?!

Wir versuchen es mir unserer so handgreiflich nüchternen Schulden- und Geldrechnerei. Aber im Augenblick verknoten sich unsere vor-tastenden Gedanken zu haarsträubendem Unsinn: „Wie oft darf ich nicht oder doch Schulden machen, um schließlich vier DM Schulden zu haben, wobei ich so oft pumpen gehen muss, wie der Teilbetrag angibt?“ Wir sitzen also kläglich und elend in einer ganz unscheinbaren Gedankenfalle.

Und schaudernd müssen wir eingestehen: Eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert, – 4 ergibt, existiert einfach nicht! Noch einmal bäumt sich unser Stolz auf, um dieser Niederlage

zu entgehen, und wir versuchen es mit irgendeinem anderen Wert. Was ist die Wurzel aus - 36 ? Aber auch so geht es nicht! Dagegen finden wir wie zum Hohn, dass es eine dritte Wurzel aus – 27 gibt, nämlich – 3, da (– 3) · (– 3) · (– 3) = – 27 ist. Es hilft uns alles nichts — wir sind und bleiben festgerannt; auf eine scheinbar kinderleichte Frage können wir keine Antwort geben und sind nicht imstande, eine Zahl zu finden, die nur etwas zu erfüllen hat, was uns fast eine Selbstverständlichkeit dünkt.

Die ganze Angelegenheit ist viel einfacher und doch zugleich verwickelter, als sie auf den ersten Blick aussieht. Sprechen wir erst von der Vereinfachung. Da wir dabei wieder eine außerordentlich wichtige mathematische „Gepflogenheit" kennen lernen, sei wieder ein sinnfälliges Bild erlaubt.

In der gewöhnlichen Umgangssprache ist es **nicht gleichgültig**, **wie** ich eine bestimmte Tatsache in Worten zum Ausdruck bringe. Der „Ton macht die Musik", sagt man. Gehe ich zum Beispiel zu meinem Chef, dessen hohe geistige Fähigkeiten ich anerkennend loben will, und sage:

„Herr Chef, ich gratuliere Ihnen zu Ihrem Weitblick", so ist das etwas anderes, als wenn ich sage: „Herr Chef, Sie sind, bei Gott, kein Rindvieh!" Obgleich beide Sätze logisch beinahe dasselbe aussagen, werde ich mit dem ersten Satz den gestrengen Vorgesetzten vermutlich erfreuen, mit dem zweiten aber werde ich wahrscheinlich beschleunigt aus dem Zimmer des Gewaltigen hinausfliegen ☺.

In der kühlen, streng sachlichen Mathematik gilt derartige Haarspalterei nicht! Hier ist einfach alles erlaubt, sofern an der bestimmten Aussage bzw. an einem bestimmten Wert nichts geändert wird und ich durch eine noch so verschrobene Aussage, Umschreibung oder andere Ausdrucksweise mir irgendeinen Vorteil erringen kann. Nur die Wahrheit muss gewahrt bleiben! Alles andere, alles „Wie" ist glatt erlaubt.

So eine Umschreibung führt uns auch hier zum Ziel! Da steht die stahlharte Nuss $\sqrt{-4} = ?$ vor uns. Nun erlauben wir uns, die Zahl unter dem Wurzelzeichen zu zerlegen, indem wir einfach annehmen: – 4 = 4 · (– 1), was durchaus richtig ist. Damit unter das Wurzelzeichen! Wir erhalten: $\sqrt{4 \cdot (-1)}$. Dürfen wir das tun? Gewiss! Dazu ein Zwischenbeispiel: $\sqrt{36}$ können wir ja auch schreiben als: $\sqrt{4 \cdot 9}$ oder $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$; jetzt ziehen wir die Wurzeln und erhalten: 2 · 3 = 6, was völlig richtig ist. Also dürfte auch die Unterteilung von $\sqrt{-4}$ in $\sqrt{4 \cdot (-1)}$ richtig sein[1]. Jetzt kommen wir einen Schritt weiter, indem wir nämlich die Wurzel aus 4 ziehen. Das vertrackte – 1, dem wir nicht beikommen, lassen wir einfach so stehen wie es ist, natürlich unter dem Wurzelzeichen, da an ihm der Befehl „Wurzelziehen" noch nicht ausgeführt ist. Es ist also

$$\sqrt{-4} = 2 \cdot \sqrt{-1}\,.$$

[1] Dem besonders interessierten Leser sei noch verraten, dass hier Vorsicht am Platze ist, denn für $\sqrt{(-4) \cdot (-4)}$ gilt das z. B. schon nicht mehr so ohne weiteres!

Bei genauerer Befolgung der hier angedeuteten Untersuchung stellt sich heraus, dass schließlich alle derartigen rätselhaften Zahlen leicht so umzumodeln sind, dass man auf ein Produkt aus einer „möglichen“ und der „unmöglichen“ Zahl $\sqrt{-1}$, kommt. Dadurch ist das Problem insofern vereinfacht, als wir Quadratwurzeln aus beliebigen negativen Zahlen, wie - 16, – 64, – 25 und so fort, auf die unheimlich merkwürdige Wurzel aus – 1 zurückführen können. Hier also, beim unseligen „Minus eins“ und seiner Wurzel, sind wir in Wirklichkeit angerannt, auf sein Geheimnis hereingefallen! — Da liegt in Wirklichkeit „der Hund begraben!“

Man hat der Wurzel aus – 1 den Namen ***i*** gegeben. Also merken:

Statt $\sqrt{-1}$ sagen wir künftig ***i*** !

Der Leser möchte nun gewiss gern wissen, welche Bewandtnis es mit diesem merkwürdigen ***i*** sonst noch auf sich hat. — Ist es überhaupt eine Zahl? — Kann man mit dieser Zahl genauso rechnen, wie mit den uns bisher bekannten Zahlen? — Erst dann haben wir die Berechtigung — es sei auch hier an das Permanenzprinzip erinnert — überhaupt von einer „Zahl ***i***“ zu sprechen.

Mit der Addition und Subtraktion haben wir zunächst wenig Mühe. Wir sehen ohne weiteres ein, dass $i + i = 2\,i$ ist. Das erscheint uns ganz selbstverständlich zu sein, obwohl wir nichts von diesem ***i***, dieser Wurzel aus – 1 wissen. Es ist so unwirklich, und doch lebt es in unserer Einbildung. Wir rechnen mit dieser „Unwirklichkeit“ so, als wäre das ganz natürlich.

$$8\,i - 5\,i = 3\,i;\quad 3\,i + 5\,i = 8\,i;\quad -4\,i - i = -5\,i \quad \text{usw.}$$

Das alles ordnet sich so zwanglos in das Gefüge unseres Rechnens ein, dass kaum ein Zweifel aufkommt. Diese rätselhaften Zahlen i, $3\,i$; $8\,i$; $-5\,i$ usw. — der Mathematiker nennt sie „**imaginäre Zahlen**“ im Gegensatz zu den wirklichen, den „**reellen Zahlen**“, mit denen wir es bislang zu tun hatten — benehmen sich also ganz manierlich. Doch, vertragen sich die imaginären Zahlen auch mit den reellen?

Zunächst sieht es ganz so aus, als ob auch das selbstverständlich sei. Dieses ***i*** marschiert ja friedlich vereint mit einem reellen Zahlenfaktor. Sobald sich aber eine reelle Zahl hinzugesellt, gibt es Schwierigkeiten. Was ist zum Beispiel $4 + 3\,i$? — Das ist doch genauso unsinnig wie etwa die Aufgabe, 4 Heringe und 3 Zitronen zusammenzuzählen! — Unmöglich! — Und doch, mit diesen unmöglichen Gebilden $4 + 3\,i$; $6 - 2\,i$; $-5 + i$ usw. beginnt einer der wichtigsten Abschnitte der modernen Mathematik. Jahrhunderte und Jahrhunderte in der Entwicklungsgeschichte der Mathematik mussten vergehen, ehe der menschliche Geist mit dieser „Unmöglichkeit“ fertig wurde. Nur sehr zaghaft setzte sich die Erkenntnis durch, dass diesen Gebilden — den komplexen Zahlen — eine besondere Bedeutung im Aufbau der Mathematik zukommt. Volle Klarheit brachten aber erst — in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts — die Arbeiten von C. F. Gauß. Seinem überragenden Genie verdanken wir auch ein Verfahren, alle imaginären und komplexen Größen bildlich darstellen zu können.

Der Zahlenstrahl, denken wir an das zweckmäßige Modell, an unser Thermometer, reicht offensichtlich für die Veranschaulichung der komplexen Zahlen nicht aus. Im „auf und ab“ der Temperaturen sind die + 4 Grad, – 5 Grad, – 1 Grad, 0 Grad usw. stets mit einer einzigen Zahlenangabe ablesbar. Zahl um Zahl ist hier hintereinander „aufgefädelt“, streng

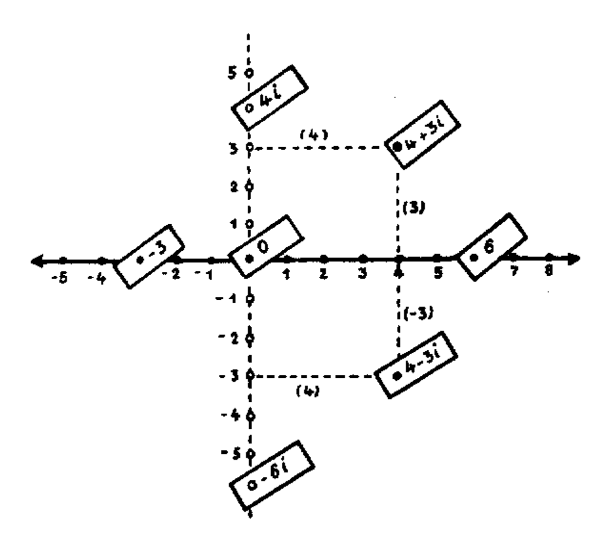
„eindimensional“, d.h. die Zahlen können sich immer nur in einer Richtung bewegen, sie haben also nur eine Bewegungsmöglichkeit. Ein „in die Breite gehen“ gibt es nicht.

Die komplexen Zahlen sind dagegen durch **zwei** Zahlenangaben gegeben. Man spricht daher auch von **Zahlenpaaren** und setzt zur Abkürzung zum Beispiel

$$4 + 3\,i = (4\,;\,3)$$

Dem Zahlenpaar (– 2 ; 6) entspricht also die komplexe Zahl $-2 + 6\,i$. Das ist natürlich nur eine Schreibweise, die aber deutlich macht, worauf es uns ankommt. Diese Zahlenpaare, die ja jeweils nur eine einzige komplexe Zahl darstellen, können nebeneinander nicht auf dem Zahlenstrahl untergebracht werden. Dazu ist einfach kein Platz, denn der Zahlenstrahl hat keine Ausdehnung in die Breite!

Nach Gauß denkt man sich nun die komplexen Zahlen außerhalb der Zahlengeraden liegend. Sie werden also „**zweidimensional**“ untergebracht in der sogenannten „**Gaußschen Zahlenebene**“.



Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene

Raucht dir, lieber Leser, schon ein wenig der Kopf? Sei nicht ungehalten, es ist nun mal so! Nur ein ganz verschwindender Teil aller mathematischen Größen und Vorstellungen ist sozusagen auch in unserer Welt zu Hause. Eine unfassliche Unendlichkeit mit unseren Denkgesetzen eigentlich unvereinbarer Wunder und Absonderlichkeiten liegt außerhalb unseres gewohnten, allgemein als einzig vorhanden geltenden Bereiches!

Es ist mit uns etwa so wie mit den Bachforellen. Ihr enger, klarer Gebirgsbach bedeutet ihnen die gesamte Welt. Alm, Flur, Anger, Dorf und Wald aber sind ihnen ohne Zweifel unvorstellbar, „imaginär“, sind Bestandteile einer Welt, die zwar vorhanden ist, die sie aber nicht kennen, einfach deswegen nicht, weil der ganze körperliche Aufbau des Fisches, die Gestaltung seiner Sinnesorgane — von der seelischen Verfassung gar nicht zu reden! — nicht dazu ausreichen, von dieser Welt außerhalb ihres Wassers etwas zu erfahren.

Und geradeso sind wir der wirklichen oder vermutlichen Wahrheit gegenüber auch nicht viel klüger als Forellen! Wir erschaudern vor imaginären Zahlen, die aus Bereichen in unsere Alltagswelt herüberlangen, in die wir unserer Beschaffenheit nach nicht einmal mit den Gedanken vordringen können: genau so, wie die flinken Fische vor einem Stein erschrecken, den ein übermütiger Bauernjunge in den reißenden Alpenbach wirft ...



Ein wenig Zahlenspuk

Das Ersinnen von Zahlenspielen und Jonglieren mit Zahlenmerkwürdigkeiten war von altersher ein beliebtes Unterhaltungsspiel; es gibt ganze Bücher darüber, wie man sich mit solchen Zahlen die Zeit vertreiben kann. So hat z. B. die Zahl 37 die seltsame Eigenschaft, dass einige Vielfache von ihr immer aus denselben Ziffern aufgebaut sind: $3 \cdot 37 = 111$; $12 \cdot 37 = 444$; $27 \cdot 37 = 999$. Noch toller treibt es die Zahl 3367. Denn multipliziert man sie mit Vielfachen von 33, so kommen zum Teil wieder Zahlen heraus, die aus den gleichen Ziffern bestehen, wie etwa $33 \cdot 3367 = 111\ 111$; $165 \cdot 3367 = 555\ 555$ und so fort. Ein ganz verteufelter „Kerl“ ist schließlich unsere 11. Denn 11 mit sich selbst multipliziert (also 11^2) ergibt 121, eine Zahl, deren Ziffernwerte ansteigen und wieder absinken. Das scheint hier noch Zufall. Doch bleibt die 11 dieser Merkwürdigkeit auch in höheren Bereichen treu.

$$11 \cdot 11 = 121$$

$$111 \cdot 111 = 12321$$

$$1111 \cdot 1111 = 1234321$$

$$11111 \cdot 11111 = 123454321$$

$$111111 \cdot 111111 = 12345654321$$

$$1111111 \cdot 1111111 = 1234567654321$$

$$11111111 \cdot 11111111 = 123456787654321$$

$$111111111 \cdot 111111111 = 12345678987654321$$

Das fängt gut an! — Diese Zahlen können wir ja kaum aussprechen:

12 345 678 987 654 321.

Eine Zahl mit 17 Stellen? — Es sind 12 Billiarden, 345 Billionen, 678 Milliarden, 987 Millionen, 654 Tausend und 321.

Dabei ist 1 Billiarde eine Eins mit 15 Nullen:

1 Billiarde = 1 000 000 000 000 000.

Das schreibt natürlich im allgemeinen kein Mensch so hin. Vielmehr benutzt man die uns bereits bekannte zweckmäßige Potenzschreibweise:

$$1 \text{ Billiarde} = 10^{15}.$$

Doch, das nur nebenbei. Wir werden darüber später noch eingehend sprechen.

Können wir uns diese Zahl überhaupt noch vorstellen? 10^{15}, das sieht so harmlos aus!

Wie lange braucht man wohl dazu, um von 1 bis 1 Billiarde zu zäh1en? 1 Jahr oder 100 Jahre? Oder gar 1000 Jahre?

Vorsicht beim Schätzen, rechnen wir lieber!

Nehmen wir einmal an, beim Zählen wird für jede Zahl 1 Sekunde benötigt. Das ist kaum zu schaffen und erfordert schon eine besondere Zähltechnik. Setzen wir die also voraus! — Außerdem soll ununterbrochen weitergezählt werden, Tag und Nacht. Es können sich ja mehrere Personen ablösen. Dann werden also gezählt, in

1	Minute	60	Zahlen
1	Stunde	3 600	Zählen
24	Stunden	86 400	Zahlen
1	Jahr	31 536 000	Zahlen.

Sehr weit kommt man also in 1 Jahr noch nicht. Und auch in 1000 Jahren ist das Ziel noch lange nicht erreicht, erst nach 30 Millionen Jahren kommt man der Zahl 1 Billiarde schon näher.

Es dauert genau

31 709 791 Jahre, 359 Tage, 1 Stunde, 46 Minuten und 40 Sekunden !
Wer’s nicht glaubt, rechne nach!

Versuchen wir es einmal in der Welt der Atome! Ein Elektron hat einen Durchmesser von 0,000 000 000 005 636 mm. Diese „Kleinheit“ können wir uns zwar auch kaum vorstellen, doch wissen wir immerhin, dass so ein Elektron sehr, sehr klein ist. Wenn wir nun eine Billiarde Elektronen aneinander reihen, wie lang ist dann diese „Kette“? — Genau 5636 mm oder 5 m, 63cm und 6 mm.

Merken wir uns noch folgende Aufteilung:

1 Tausender	=	1 000	Einer
1 Million	=	1 000	Tausender
1 Milliarde	=	1 000	Millionen
1 Billion	=	1 000	Milliarden
1 Billiarde	=	1 000	Billionen
1 Trillion	=	1 000	Billiarden
1 Trilliarde	=	1 000	Trillionen
1 Quadrillion	=	1 000	Trilliarden.

Alles in allem also recht unterhaltsame und interessante Geschichten! Wir wollen aber noch ein wenig tiefer schürfen und vor allem mit dem Weiterspinnen einer Frage anfangen, die dem Leser am Schluss des vorigen Kapitels sicher schon eingefallen sein dürfte. Wir sahen dort nämlich zu unserem Erstaunen, dass es neben den uns altgewohnten Zahlen noch eine merkwürdige Welt ganz anderer Zahlenbegriffe gibt, nämlich das Geisterreich der nur bildlich vorstellbaren sogenannten „**imaginären**“ und „**komplexen**“ Zahlen. Wir wollen aber jetzt hübsch auf unserer biederen reellen „Zahlenleiter“ bleiben und die naheliegende Frage gründlicher besprechen, ob es noch andere Arten von Zahlen gibt. Und tatsächlich ist diese Frage zu bejahen! Gehen wir bei unserer Untersuchung wieder von den ganzen Zahlen aus. Wie sie für gewöhnlich eingeteilt werden, ist bekannt: in gerade und ungerade Zahlen, wobei wir eine gerade Zahl eine Zahl nennen, die durch 2 teilbar ist. Es ist nichts besonders Aufregendes, Absonderliches an dieser landläufigen Unterteilung. Etwas sonderbarer wird die Geschichte aber schon bei den sogenannten **Primzahlen**. Das sind jene eigenwilligen, zumeist ungeraden Zahlen, die außer durch sich selbst nur mehr durch 1 teilbar sind. Warum wir „zumeist“ sagten? Man vergisst nämlich gern, dass es auch **eine einzige gerade** Zahl gibt, die eine Primzahl ist, nämlich die 2.

Hinter diesen **Primzahlen** — gleichsam im Vorübergehen wollen wir bei unserem Spaziergang auch dieses Wunder kennen lernen — steckt nun ein Rätsel der Mathematik, und zwar liegt das beinahe Unheimliche der Primzahlen in der völlig unberechenbaren Regel- oder Unregelmäßigkeit ihrer Verteilung. Sie fügen sich nämlich keinem allgemeinen Gesetz. So beginnt die Zahlenreihe (von 1 abgesehen) mit zwei Primzahlen, nämlich 2, 3. Dann kommen 5 und 7, 11 und 13, 17 und 19 usw. Wie man sieht, beliebt es den Primzahlen oft, paarweise aneinander nahe gerückt aufzutreten. Doch werden die Lücken zwischen ihnen regellos bald größer, bald kleiner. Sie und damit die Primzahlen als solche zu berechnen, erwies sich aber bisher als völlig unmöglich, so dass uns trotz unseres mathematischen Gedankenwerkzeugs tatsächlich nichts übrigbleibt als lästig-zeitraubendes Probieren, ob eine bestimmte Zahl eine Primzahl ist oder nicht. So kommt man z. B. erst nach umständlichem Dividieren darauf, dass 589 keine Primzahl, sondern das Produkt aus $19 \cdot 31$ ist. Umgekehrt wird man vermuten: Die Primzahlen müssen um so seltener werden, in immer größeren Intervallen aufeinander folgen, je höher hinauf man in das Gebiet der Millionen, Trillionen usw. kommt, Man könnte daraus schließen, dass die Primzahlen überhaupt einmal aufhören müssten und es eine allergrößte Primzahl gäbe, „hinter der“ keine mehr zu finden sei. Aber schon der geniale **Euklid** wusste um 300 v. Chr., dass die Primzahlen in Wirklichkeit nie aufhören. Nur sind uns die größten Primzahlen natürlich immer noch unbekannt. Es gibt hier so etwas wie einen mathematischen Sport, nämlich die „Primzahlenjagd“. Viele Jahrzehnte hindurch musste

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$$

als die höchste Trophäe gelten, die je ein Primzahlenjäger erbeutet hatte, ein kapitaler „Einundsechzigender“, der lange Zeit den Rekord innehaben konnte, die größte den Menschen bekannt gewordene Primzahl zu sein. Inzwischen war aber ein anderer Mathematikus noch glücklicher, indem es ihm gelang, die Zahl

$$2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,584\,113\,351\,126\,207\,692\,831$$

als Primzahl zur Strecke zu bringen. Hier noch schnell die Verdeutlichung der aufgeschriebenen Rechnung: Multipliziere 2 hundertsiebenundzwanzigmal mit sich selbst und ziehe dann 1 davon ab! Das ergibt eine Primzahl, die vor kurzer Zeit noch den Ruhm beanspruchen konnte, Herrscherin unter den Primzahlen zu sein.

Aber auch sie ist nunmehr entthront! — Heute (1958) weiß man bereits, dass

$$2^{2281} - 1$$

eine Primzahl ist. Hier hört unser Vorstellungsvermögen aber so ziemlich auf! Um diese Zahl, die 687 Stellen hat, hier abzudrucken, würden wir 14 eng bedruckte Zeilen benötigen.

Soviel von den Primzahlen.

Sonst finden wir auf unserer Zahlengeraden nicht viel Aufregendes, sofern wir nur die **ganzen** Zahlen im Auge behalten. Aber sie sind keinesfalls allein auf der Welt. Wir haben neben ihnen noch die bekannten **Brüche**: die etwas moderneren und im praktischen Leben auf Schritt und Tritt vorkommenden **Dezimalbrüche** und die heute ziemlich in den Hintergrund getretenen **gemeinen** Brüche.

Was ist nun ein gemeiner Bruch?

Auch das zu klären ist nicht uninteressant. Die gemeinen Brüche stammen gewissermaßen von der **Teilung** ab. Ursprünglich war der bekannte Bruchstrich das meistgebrauchte Zeichen für diese Rechenoperation. Erst **Leibniz** führte den heute allgemein gebräuchlichen Doppelpunkt (:) als das Rechenbefehlszeichen „Dividiere!“ ein. In Wirklichkeit also ist der gemeine Bruch eine anbefohlene, aber noch nicht beendigte Teilung. Ich kann für $\frac{14}{19}$ genau so gut den Befehl 14 : 19 schreiben. Bekannt ist dann noch die Unterteilung in echte (z. B. $\frac{1}{2}$) und unechte Brüche (z. B. $\frac{5}{4}$) und so fort.

Mit der Einführung des Dezimalsystems sind die gemeinen Brüche so ziemlich aus dem praktischen Leben verschwunden, so dass heute nur noch wenigen Leuten die einfachen Rechenregeln mit ihnen geläufig sind. Leider! Denn die gemeinen Brüche sind außerordentlich anschaulich!

Nun stellt es sich heraus, dass manche durch gemeine Brüche einfach und exakt darstellbaren Werte mit Dezimalbrüchen nur unvollkommen erfasst werden. So ist $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$, $\frac{2}{3} = 0{,}666\,666\ldots$,.was um so mehr verblüffen muss, als andere Brüche, wie etwa $\frac{3}{4}$ sich glatt auch in Dezimalen — hier also 0,75 — niederschreiben lassen. Die Punkte hinter einem Dezimalbruch zeigen an, dass dieser Dezimalbruch unendlich lang ist, also in Ewigkeit fortgesetzt werden kann, mithin **unendlich** viele Dezimalstellen hat.

Man muss sich also merken, dass es auch gemeine Brüche gibt, die sich nur durch unendlich lange Dezimalbrüche, d. h. praktisch — da wir ja immer im Endlichen bleiben müssen — überhaupt nicht genau durch Dezimalbrüche wiedergeben lassen. Und was da für absonderliche Verhältnisse herrschen, lehrt am besten die durch einfache Teilung gewonnene Umwandlung des Bruches $\frac{10}{7}$ in einen Dezimalbruch.

Dividiert man da nämlich drauflos, so nimmt die Geschichte überhaupt kein Ende; denn wir erhalten das beinahe erheiternde Ergebnis 10 : 7 = 1,42 857 142 857 142 857 ... und so fort in alle Unendlichkeit!

Solcherlei Brüche nennt man **periodische** (unendliche) Dezimalbrüche und schreibt für 0,666 ... einfach $0,\overline{6}$ und für 1,42 857 142 857 ... einfach $1,42\,857\,\overline{142\,857}$. Dahinter scheint nicht viel zu stecken, selbst dann nicht, wenn wir verraten, dass schließlich auch **ganze Zahlen** in Form eines derartigen periodischen Dezimalbruches ausgedrückt werden können. So z. B. ist 1 = 0,9 999 999 ... gleich $0,\overline{9}$, weiter 17 = 16,9 999 999 ... = $16,\overline{9}$ usw.

Hier zur Erheiterung und Erholung zwei mathematische Witze:
Wie schreibt man 100 mit sechs Neunern? Nun — so lautet die Antwort in verschiedenen Unterhaltungsbüchern — einfach $99\frac{99}{99}$ Ebenso witzig aber noch geistreicher wäre es, zu fragen, wie man 10 mit zwei Neunern schreiben kann, nämlich $10 = 9,\overline{9}$, was auch mathematisch richtig ist.

Interessant wird die Sache erst bei der Umkehrung der hier gefundenen Wahrheit. Es ist ja sonnenklar, dass jeder endliche Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch umgewandelt werden kann.

0,013 ist ebensoviel wie $\frac{13}{1000}$;

$1,32 = 1 + \frac{32}{100} = \frac{132}{100}$;

$24,05 = 24 + \frac{5}{100} = \frac{2405}{100}$ und so fort.

Bei unendlichen Dezimalbrüchen kommen wir so natürlich nicht weiter. Ein Beispiel: Gibt es einen gemeinen Bruch für

$$\sqrt{2} = 1,41421\ ...\ ?$$

Wir können das Tausendfache, das Hunderttausendfache oder noch so große Vielfache bilden: Das Komma verschwindet nicht, ist einfach nicht wegzubekommen.

Versuchen wir es mit den einfacheren periodischen Dezimalbrüchen. Hier wissen wir wenigstens, wie die unendlich vielen Stellen hinter dem Komma aussehen:

2,6666 ... ; 1,42 857 142 857 ...

Die sogenannten „**Perioden**“ 6 bzw. 142 857 wiederholen sich bis in alle Unendlichkeit. Mit einem kleinen Kniff gelingt es nun, das Komma wegzubringen. Das Zehnfache der Zahl 2,6666 . . . hat dieselben Stellen hinter dem Komma, wie die einfache Zahl

$$10 \cdot 2,6666\ ... = 26,6666\ ...$$
$$1 \cdot 2,6666\ ... = 2,6666\ ...$$

Ziehen wir also von der zehnfachen die einfache Zahl ab, dann kommt ganz einfach 24 heraus. Das ist also das Neunfache der Zahl. Genauso wie 10 Zitronen weniger 1 Zitrone eben 9 Zitronen sind. Also

$$9 \cdot 2{,}6666\ ... = 24.$$

Das Einfache der Zahl ist dann der neunte Teil davon. Wir haben damit unsere Aufgabe gelöst

$$2{,}6666\ ... = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

Dabei konnten wir den Bruch noch mit 3 „**kürzen**" d.h. wir haben Zähler und Nenner des Bruches durch die gleiche Zahl geteilt. Der Wert des Bruches bleibt dadurch bekanntlich unverändert. Ob wir 12 Äpfel durch 4 oder 6 Äpfel durch 2 teilen, ist schließlich im Hinblick auf das Ergebnis 3 völlig gleichgültig.

Ganz entsprechend lassen sich alle periodischen Dezimalbrüche in gemeine Brüche umwandeln. Versuchen wir es noch mit der etwas „schwierigeren" Zahl 1,42 857 142 857 ... , die wir durch die Division 10 : 7 erhalten haben. Bei diesem Dezimalbruch hat allerdings erst das Einemillionfache der Zahl dieselben Stellen hinter dem Komma, wie die einfache Zahl

$$\begin{array}{rrcr} & 1\,000\,000 \cdot 1{,}42\,857\,142\,857\ ... & = & 1428571{,}42857142857\ ... \\ - & 1 \cdot 1{,}42\,857\,142\,857\ ... & = & 1{,}42857142857\ ... \\ \hline & 999\,999 \cdot 1{,}42\,857\,142\,857\ ... & = & 1428570 \end{array}$$

Daraus erhalten wir das Einfache der Zahl als den 999 999-sten Teil

$$1{,}42\,857\,142\,857\ ... = \frac{1428570}{999999}.$$

Damit sind wir eigentlich schon fertig, denn wir haben ja einen gemeinen Bruch herausbekommen. Dieser Bruch sieht allerdings noch sehr kompliziert aus. Wir wollen daher versuchen, ob wir noch kürzen können. In der Tat können wir der Reihe nach durch 9, 3, 37, 13 und 11 teilen. Es ist

$$\frac{1428570}{999999} = \frac{158730}{111111} = \frac{52910}{37037} = \frac{1430}{1001} = \frac{110}{77} = \frac{10}{7}$$

Wir erhalten also das Ergebnis

$$1{,}42\,857\,142\,857\ ... = \frac{10}{7}$$

Das war schon nicht mehr ganz so einfach!

Aber bei der Frage; „*Wie steht es mit den unendlichen, aber nicht periodischen Dezimalbrüchen ? Wie wandelt man sie in gemeine Brüche um?*" stehen wir vor einem neuen Zahlengeheimnis.

Wir müssen den Leser bitten, uns die Antwort auf diese Frage einfach zu glauben. Denn der — an sich fabelhaft einfache — mathematische Beweis für unsere nun kommende Aussage

wäre doch noch zu schwer, vor allem deswegen, weil wir die „Sprache der Mathematik" noch zu wenig beherrschen. Die Antwort lautet daher einfach:

Unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche lassen sich überhaupt nicht in gemeine Brüche umwandeln!

Nun, das sieht auf den ersten Blick gar nicht so unerhört aus. Wir müssen daher noch tiefer schürfen, um dem Leser die ganze Tragweite dieses Geheimnisses klarzumachen.

Dazu fangen wir wieder mit den gemeinen Brüchen an. Sie sind mit den ganzen Zahlen nahe verwandt, da sie sich direkt aus ihnen aufbauen: Immer steht eine ganze Zahl bei ihnen im Zähler und im Nenner. Diese Zahlen können beliebig klein, aber auch beliebig groß genommen werden. Ich kann ohne weiteres Trillionen und Quadrillionen, die unfasslichsten Zahlenungeheuer, in dieser oder jener Form über und unter dem Bruchstrich aufschreiben. Die unmittelbare Folge davon ist, dass ich zum Beispiel nicht angeben kann, was bei einem gegebenen gemeinen Bruch der nächstgrößere und der nächstkleinere ist. Welcher Bruch ist um das Geringstmögliche größer als $\frac{1}{2}$? Unbeantwortbare Frage! Denn ich verliere mich dabei in Zahlenmonstren von schier unendlicher Größe! Und immer noch kann ich einen näher an $\frac{1}{2}$ liegenden Bruch konstruieren. So ist $\frac{51}{100}$ beinahe $\frac{1}{2}$, aber $\frac{50000001}{100000000}$ „trifft" den angestrebten Wert noch viel „genauer"; und wenn ich die Zuflucht zu Riesenzahlen nehme, wird der Unterschied zu $\frac{1}{2}$ immer kleiner, allerdings ohne je ganz zu verschwinden.

Die unmittelbare Folge dieser Feststellung scheint die Möglichkeit zu sein, jeden noch so fein abgestuften Bruchwert mit gemeinen Brüchen darzustellen oder aufzuschreiben. Denn mir stehen ja, falls nötig, riesengroße Zahlen zur Verfügung. Ich muss, ganz volkstümlich gesprochen, auch mit gemeinen Brüchen jeden gewünschten Bruchwert „treffen" können.

Hand in Hand damit geht — wenn wir wieder zu unserer „Zahlengeraden" zurückkehren — die Tatsache, dass auch auf dieser die gemeinen Brüche, in unendlich feiner Abstufung **lückenlos aneinanderschließend**, den Bereich von einer ganzen Zahl bis zur nächsthöheren — und damit den ganzen Bereich der Zahlengeraden überhaupt — anfüllen müssen.

Beide Schlussfolgerungen sind aber Überraschender- und schier Unglaublicherweise **falsch**! Obwohl sich schon zwischen zwei ganzen Zahlen eine volle Unendlichkeit von echten Brüchen aneinander reiht, ist die Reihe zwar „**dicht geschlossen**", **es klaffen aber doch Lücken** ! Ferner: Es ist mit Hilfe gemeiner Brüche nicht möglich, jeden beliebigen Bruchwert anzugeben!

Und die Zahlen, die **zwischen** den allerfeinst abgestuften gemeinen Brüchen gewissermaßen in die Lücken der Zahlengeraden hineingehen, sind die **unendlich langen nichtperiodischen Dezimalbrüche** !

Nun, diese Feststellung wird — das ahne ich — manchem Leser unlogisch und widersinnig vorkommen. Im Grunde genommen ist sie es ja auch. Schon die alten Griechen haben sich über dieses Problem weidlich den Kopf zerbrochen. Sie nannten dieses merkwürdige Ergebnis seit Pythagoras „***alogos***", was etwa so viel heißt wie „unaussprechlich" oder „unsinnig". Auf dem gleichen Standpunkt steht schließlich die Mathematik auch heute noch. Denn, da diese neuen Zahlen, die unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüche, der Vernunft oder „***ratio***"

widersprechen, nennt man sie **irrationale** Zahlen. Womit wir also eine neue Art von Zahlen kennengelernt haben. Die uns bekannten „**reellen**“ Zahlen werden also in **rationale** (vernunftgemäße) und **irrationale** (vernunftwidrige) Zahlen eingeteilt.

Und jetzt zur Verdeutlichung des Gesagten noch ein Bild, von dem freilich schon jetzt zugegeben werden muss, dass es wie jeder Vergleich hinkt, ja hinken muss, da wir hier etwas unendlich Feines ganz grob-sinnlich veranschaulichen wollen.

Stellen wir uns unsere Zahlengerade einmal als eine vielhundertkilometerlange Eisenbahnstrecke vor. Auch diese ist eine trefflich bezeichnete Zahlengerade, insofern nämlich, als die Strecke vom Ausgangspunkt angefangen die sogenannte „Kilometrierung“ zeigt. Es stehen rechts oder links am Bahnkörper Kilometersteine: große, die den vollen Kilometer anzeigen, und kleinere, welche die Strecke in Hundertmeterabschnitte zerteilen. Vom Fenster des Abteils aus kann man sie an jeder Bahnlinie erkennen. Sie tragen auch die entsprechende Bezeichnung: 27,8; 27,9. . . 40,0; 40,1; 40,2 km und so fort. Diese an sich recht grobe Einteilung erfüllt eisenbahntechnisch vollkommen ihren Zweck und genügt praktisch allen Fällen. Geschieht irgendwo etwas, so ist der Schauplatz hinreichend durch die Angabe „bei km 44,7“ oder „zwischen km 56,6 und 56,7“ angegeben. Diese Kilometersteine können wir mit unseren gemeinen Brüchen, also den „rationalen“, den „vernünftigen“ Längenangaben der Bahnstrecke vergleichen.

Aber ebenso müssen wir zugeben, dass es z. B. auf der Strecke einen Punkt gibt, der vom Anfangspunkt haargenau 4,4277 448 km entfernt liegt. Nur ist er mit keinem bekannten technischen Mittel genau zu ermitteln, und zwar deshalb nicht, weil keine Längenmessung auf so große Entfernungen hin solch eine Genauigkeit erlaubt, dass wir einen Punkt auf zehntel Millimeter angeben könnten. Der Punkt existiert also auf der Strecke tatsächlich, ohne dass wir ihn selbst mit den allerfeinsten Messinstrumenten angeben könnten. Ein solcher Punkt ist also wahrhaft widersinnig. Und einen Eisenbahner, der etwa die Meldung überbrächte: „Infolge eines Lokomotivschadens blieb der D 76 auf offener Strecke liegen, und zwar so, dass das erste Laufradpaar der Lokomotive bei Betriebskilometer 429,7758 stand“, müsste man mit vollem Recht lächerlich finden. Genau so ergeht es uns mit den irrationalen Zahlen. So wenig wir auf offener Strecke einen Punkt auf zehntel oder hundertstel Millimeter genau angeben können, ist es uns auch unmöglich, eine irrationale Zahl auch nur niederzuschreiben. Denn mit den handlichen, aber viel zu grob und ungenau zupackenden gemeinen Brüchen geht es nicht, und wenn wir unsere Zuflucht zu Dezimalbrüchen nehmen, sind wir erst recht „aufgeschmissen“, da unsere ganze Lebenszeit, ja jene unvorstellbar lange Zeit seit den ersten Schöpfungstagen einfach nicht dazu ausreichen würden, einen wirklich unendlich langen nichtperiodischen Dezimalbruch niederzuschreiben ...

Womit wir ein hübsches und einleuchtendes Bild hätten, das aber **völlig falsch** ist!

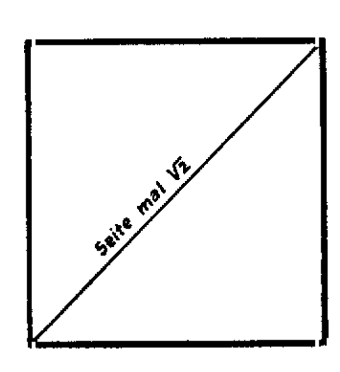
Richtiger gezeichnet wäre es nämlich erst dann, wenn wir die Kilometersteine — also die Symbole für die gemeinen Brüche — **unendlich dünn und lückenlos dicht** aneinanderschließend zeichnen wollten, so dass jeder denkbar geringste Längenunterschied sofort auch durch einen eigenen Stein bezeichnet würde. Diese Steine müssten also einen ununterbrochenen niedrigen Wall neben unserem Gleise bilden, in dem nirgends auch nur die allerfeinste Ritze klaffte. Und trotzdem ist immer noch Zwischenraum genug da, durch den eine unfasslich große Anzahl unendlicher Dezimalbrüche gewissermaßen hindurchschlüpfen kann. Dieser Widerspruch zwischen lückenlosem Aneinanderschließen bei gleichzeitigem Offenstehen unzählbar vieler Lücken ist das Widersinnige, das Irrationale an diesem Geheim-

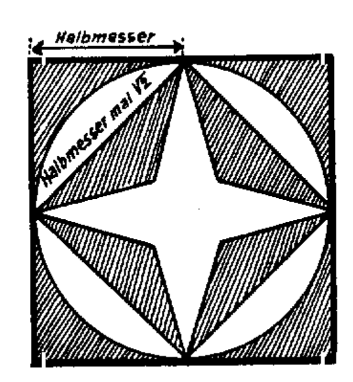
nis der Brüche, das die Menschheit seit über zwei Jahrtausenden plagt und auch heute noch nicht so recht in unseren Kopf hineinwill!

Alles in allem also: Es ist und bleibt eine vertrackte Geschichte mit diesen irrationalen Zahlen.

Doch nun kommt eine, nach dem bisherigen fast verrückt erscheinende Tatsache: Irrationale Zahlen lassen sich „zeichnen". Hierzu ein hübsches Beispiel.

Eine wichtige und praktisch recht häufig gebrauchte Größenbeziehung ist die zwischen der Länge einer Quadratseite und der Diagonale. Ich will z. B. in einen Kreis von bestimmter Größe ein quadratisches Ornament einzeichnen. Wie groß ist die Quadratseite, wenn der Kreisdurchmesser gegeben ist? Denkt man nach, so kommt man, da es sich hier um ein rechtwinkeliges, gleichschenkliges Dreieck handelt, unter Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes darauf, dass die Diagonale eines Quadrates gleich ist der Seitenlänge multipliziert mit der Zahl $\sqrt{2}$. Wir haben diese Zahl ja schon berechnet, sie ist 1,4142 ..., also ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch, eine **irrationale** Zahl. Zeichnet man also in einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 die Diagonale, so hat diese die Länge $\sqrt{2} = 1{,}4142 \ldots$. Wir haben damit die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ zeichnerisch dargestellt.





Irrational sind ferner fast alle Wurzeln, z. B. die Quadratwurzeln aus 5, aus 8, die dritte Wurzel aus 36, aus 49 oder 112 usw. Eine Ausnahme bilden alle Wurzeln, die „aufgehen", z.B. $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$; $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$; $\sqrt{6{,}25} = \sqrt{2{,}5^2} = 2{,}5$ usw.

Auch das unendliche Heer der Logarithmen — wir lernen diese noch genauer kennen — sind fast alle irrationale Zahlen.

Mit Logarithmen kommen wir aber noch zu einer anderen Zahlengruppe — die wir bei unserem Spaziergang kennen lernen wollen —, die „**transzendenten Zahlen**". Sie gehören auch zu den **irrationalen** Zahlen, sind aber dadurch gekennzeichnet, dass sie nicht mehr als „Wurzel"[1)] dargestellt werden können.

Während sich über die irrationalen Zahlen schon die alten Griechen weidlich geärgert haben, ist die Entdeckung der Transzendenten eine Angelegenheit neuerer Zeit. Selbst C. F. **Gauß** wusste noch nichts Genaueres von ihnen. Erst in den vierziger Jahren des 19. Jahrhunderts kam man auf diese Merkwürdigkeit.

[1)] Genauer „Wurzel einer algebraischen Gleichung"; doch das verstehen wir nicht und es ist auch für uns nicht weiter wichtig.

Der vielleicht schon etwas von Kopfbeklemmungen geplagte Leser wird hier meinen, dass wir uns schon ein wenig zu weit verstiegen hätten. Gemach! Eine der wichtigsten Zahlen, die seit Jahrtausenden mehr oder weniger genau bekannte sogenannte **Ludolfsche Zahl**, die angibt, um wie vielmal größer der Umfang eines Kreises ist als der Durchmesser, die berühmte Zahl „π“ (Pi), gehört hierher. Dass sie **irrational**, das heißt nur mit Hilfe eines unendlich langen nichtperiodischen Dezimalbruches ausdrückbar ist und den Zahlenwert

3,14 159 265 358 979 323 846 ...

hat, wusste man schon lange, dass sie aber auch transzendent ist, wurde erst 1882 von **Lindemann** nachgewiesen. Früher schon gelang der Beweis, dass auch die ebenso wichtige Zahl „e“, die Basis des sogenannten natürlichen Logarithmensystems, nämlich

2,718 281 828 459 045 ...

transzendent ist. Diese große Entdeckung machte **Hermite** 1873.

Beklage dich nicht, lieber Leser, dass wir deinem Vorstellungsvermögen ein wenig hart zugesetzt haben! Aber sind es nicht wahrhaft interessante Geheimnisse, die schon ein oberflächlicher Spaziergang durch das Reich der Zahlen offenbart hat? Wie kläglich klein ist doch unsere Macht, die nicht einmal hinreicht, um eine so einfache Zahl wie die, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt, niederzuschreiben! Und wie ungeheuerlich groß und erhaben ist die Geistesarbeit, die zu allen diesen Erkenntnissen geführt hat!

Eine Gegenüberstellung, die jetzt schon dem ernsthaft Nachdenkenden einen Vorgeschmack von der Schönheit der mathematischen Vorstellungswelt geben mag!



Das Hexeneinmaleins

Die ersten Eindrücke aus dem Zaubergarten der Mathematik haben unsere Vorstellungswelt grundlegend gewandelt.

Wie interessant sind doch all die Zusammenhänge, die selbst die einfachsten Rechnungen miteinander verbinden!

Bevor wir uns nun der gar nicht mehr so „grau“ erscheinenden „Theorie“ weiter zuwenden, sollen zunächst einige praktische Probleme untersucht werden. Nur wollen wir vorsichtshalber noch verschweigen, worum es sich handelt, damit der gute Leser nicht gleich wieder aus Entsetzen vor einem vermeintlich schwierigen Begriff das Buch zuklappt, in der Meinung, derartig verwickelte Dinge denn doch nie begreifen zu können.

In Wirklichkeit ist die Sache wieder einmal so einfach, dass sich —erfahrungsgemäß — selbst pfiffige Knirpse aus niederen Volksschulklassen mitunter damit beschäftigen.

Die Zahl 10 erfreut sich bekanntlich bei alt und jung ganz besonderer Beliebtheit. Warum, ist leicht einzusehen. Zehn ist die Zahl, mit der alle Zählerei gewissermaßen wieder von vorn anfängt. Und deswegen lässt es sich mit diesem praktischen Zehner auch so gut rechnen; eine angenehme Zahl, die beim Addieren, Multiplizieren, Dividieren und Subtrahieren kaum Kopfschmerzen verursacht.

Beginnen wir also mit unserer „einfachen“ Zahl zu rechnen! Einigermaßen merkwürdig ist das Multiplizieren von Zehn mit sich selbst, also das sogenannte **Potenzieren**. Dabei wollen wir natürlich die uns schon bekannten kleinen, hochgestellten Ziffern, die Hochzahlen, verwenden. Wir erinnern uns noch, wie wir diese Schreibweise aussprechen sollen.

$10 \cdot 10 = 10^2$ ist ebensoviel wie „Zehn zum Quadrat“ oder — eine ganz treffende Aussprache, die wir vorwiegend gebrauchen wollen — „Zehn hoch zwei“. Dementsprechend ist „Zehn hoch drei“ = 10^3, d.h. gleich Tausend und so fort.

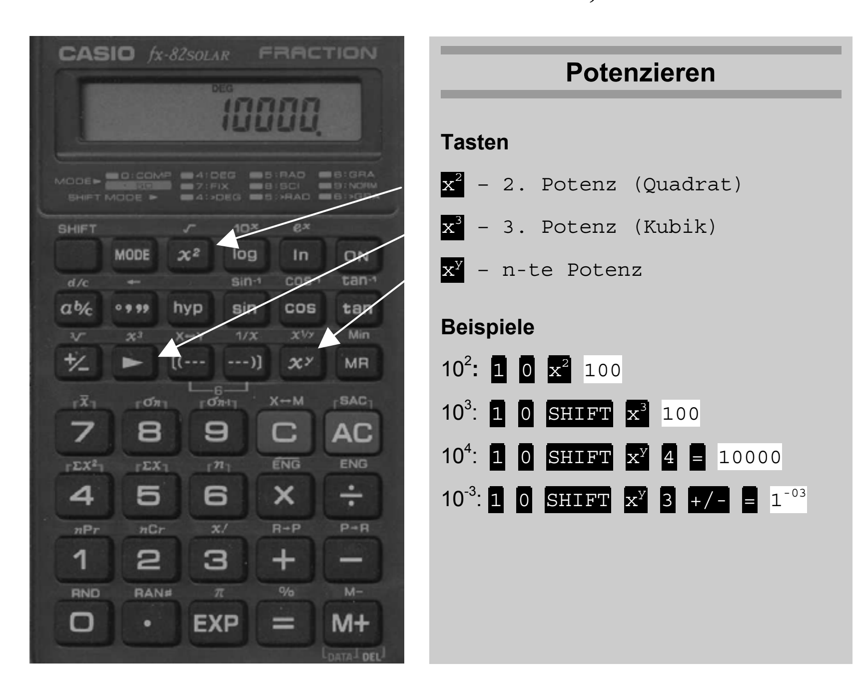
10^1	$= 10$	(**ein** Faktor)	=	10	(**eine** Null)
10^2	$= 10{\cdot}10$	(**zwei** Faktoren)	=	100	(**zwei** Nullen)
10^3	$= 10{\cdot}10{\cdot}10$	(**drei** Faktoren)	=	1000	(**drei** Nullen)
10^4	$= 10{\cdot}10{\cdot}10{\cdot}10$	(**vier** Faktoren)	=	10000	(**vier** Nullen)
10^5	$= 10{\cdot}10{\cdot}10{\cdot}10{\cdot}10$	(**fünf** Faktoren)	=	100000	(**fünf** Nullen)

... usw.

Dabei haben wir uns nur an einer Stelle etwas erlaubt, was dem Leser vielleicht „spanisch“ vorkommen kann, nämlich die Schreibweise 10^1, also „Zehn hoch eins“. Doch wenn wir uns die Übersicht genauer ansehen, erkennen wir, dass sich 10^1 ganz harmonisch einfügt. Es bedeutet lediglich — im Vergleich zu den anderen Potenzen —, dass die Zehn eben nur einmal hinzuschreiben ist.

Aber noch mehr entnehmen wir der Übersicht! Wir erkennen einen überraschenden Zusammenhang mit den kleinen Hochzahlen und der Anzahl der Nullen im ausmultiplizierten Ergebnis.

Das Ergebnis hat nämlich hinter der Eins so viele Nullen, wie die Hochzahl angibt !



Eine Million ist demnach gleich 10^6, wird also mit sechs Nullen geschrieben, genau so wie 10^2, nämlich 100, nur zwei Nullen hat. Daraus ergibt sich eine höchst erfreuliche Bequemlichkeit: Wir können jetzt selbst Zahlengiganten ganz einfach und übersichtlich ausdrücken.

$$1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ z.B. ist einfach } 10^{30}.$$

Ja selbst bei Zahlenriesen, deren Stellen nicht gerade nur Einsen und Nullen aufweisen, können wir unsere bequeme Schreibweise benutzen:

$$29\,000\,000\,000 \text{ sind nichts weiter als } 29 \cdot 1\,000\,000\,000 = 29 \cdot 10^9.$$

Aber noch viel mehr erleichtern uns die kleinen hochgestellten Ziffern, die sogenannten „**Exponenten**“, Multiplikation, Division, Potenzieren und Wurzelziehen.

Gehen wir alles der Reihe nach schön langsam durch.

$$100 \cdot 1000 \text{ ergibt } 100\,000.$$

In unserer neuen Schreibweise heißt das:

$$10^2 \cdot 10^3 = 10^5,$$

genau so wie etwa

$$1\,000\,000 \cdot 1\,000 = 10^6 \cdot 10^3 = 10^9 = 1\,000\,000\,000 \text{ ist.}$$

Wir erkennen zu unserer Überraschung:

Die Multiplikation der wirklichen Zahlen wird zu einer Addition der Hochzahlen, und zwar nicht nur, wie sofort verraten sei, beim Zehner allein, sondern bei allen überhaupt möglichen Zahlen.

Denn auch $3 \cdot 9 = 27$ ist nichts anderes als $3^1 \cdot 3^2 = 3^3$.

Und jetzt verstehen wir auch, warum es gut ist, beim einfach dastehenden Zehner oben eine kleine Eins hinzusetzen. Genau so geht es beim Dividieren. Z. B.

$$1000 : 10 = 100.$$

In unserer Schreibweise ist das

$$10^3 : 10^1 = 10^2.$$

Es wird also hier aus der **Division** der eigentlichen Zahlen eine **Subtraktion** der Exponenten!

Damit sind wir jetzt nicht mehr weit entfernt von der Beantwortung der Frage: „Wie schreibe ich Dezimalbrüche auf?“

Zunächst eine Frage vorweg!

Was ist $10^1 : 10^3$?

Subtrahieren wir, entsprechend unserer Regel, die Hochzahlen, dann kommt 10^{-2} heraus. Das ist wieder einmal eine fast unsinnige Merkwürdigkeit, mit der wir auf den ersten Blick wenig anfangen können.

10^{-2} ? Zehn nicht zweimal hingeschrieben und dann miteinander multipliziert!? Mit der Anschauung ist es offensichtlich vorbei. Doch in diesem Fall ist es gar nicht so schwer, dem Geheimnis auf die Spur zu kommen.

Bekanntlich ist ja $10^1 : 10^3$ auch dasselbe wie $\frac{10^1}{10^3} = \frac{10}{1000}$. Diesen Bruch können wir aber noch mit 10 kürzen und erhalten $\frac{1}{100}$. Die „**Potenz**“ 10^{-2} entpuppt sich damit als der **Bruch** $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$. Das geht auch mit beliebigen Zahlen! So folgt z. B. aus $2^2 : 2^5$, dass 2^{-3} nichts anderes als der Bruch $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ ist. Wem das nicht klar wird, der rechne einfach, ohne die Hochzahlen zu benutzen, nach.

Dazu noch einige Beispiele:

2^3	=	8	3^3	=	27	5^3	=	125	10^3	=	1000
2^2	=	4	3^2	=	9	5^2	=	25	10^2	=	100
2^1	=	2	3^1	=	3	5^1	=	5	10^1	=	10
2^{-1}		$\frac{1}{2}$	3^{-1}	=	$\frac{1}{3}$	5^{-1}	=	$\frac{1}{5}$	10^{-1}	=	$\frac{1}{10}$
2^{-2}		$\frac{1}{4}$	3^{-2}	=	$\frac{1}{9}$	5^{-2}	=	$\frac{1}{25}$	10^{-2}	=	$\frac{1}{100}$
2^{-3}		$\frac{1}{8}$	3^{-3}	=	$\frac{1}{27}$	5^{-3}	=	$\frac{1}{125}$	10^{-3}	=	$\frac{1}{1000}$

Die Brüche lassen sich auch als Dezimalbrüche schreiben. Besonders einfach geht das mit den Zehner-Brüchen:

$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$	= **0,**1	**eine**	Null
$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$	= **0,0**1	**zwei**	Nullen
$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$	= **0,00**1	**drei**	Nullen
$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}$	= **0,000**1	**vier**	Nullen
$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000}$	= **0,0000**1	**fünf**	Nullen
$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000}$	= **0,00000**1	**sechs**	Nullen

Die negative Hochzahl gibt also an, wie viele Nullen der Dezimalbruch haben muss. Wir können damit ohne besondere Zwischenrechnung eine Zehner-Potenz mit negativen Hochzahlen sofort in einen Dezimalbruch umwandeln. So schreibt man z. B. bei 10^{-8} einfach 8 Nullen hin, fügt eine 1 an und setzt schließlich noch das Komma.

Also ganz einfach! — Es bedarf kaum eines Hinweises, dass man diese Potenzschreibweise mit negativen Hochzahlen sehr zweckmäßig für die Darstellung sehr kleiner Zahlen verwenden kann. Ein Beispiel ist uns ja noch in Erinnerung: Der Durchmesser eines Elektrons, der mit 0,000 000 000 005 636 mm angegeben wurde. Da

$$5636 \cdot 0{,}000\,000\,000\,000\,001 = 0{,}000\,000\,000\,005\,636$$

ist, können wir dieses unhandliche Zahlengebilde nunmehr sehr viel einfacher schreiben:

$$\text{Durchmesser des Elektrons} = 5636 \cdot 10^{-15}\ \text{mm}.$$

Und so steht es auch in allen wissenschaftlichen Büchern!

Der eine oder andere Leser wird vielleicht schon bemerkt haben, dass bei der Einführung der negativen Hochzahlen auch wieder das Permanenzprinzip mit im Spiel war: Wir haben den Potenzbegriff auf Potenzen mit negativen Hochzahlen erweitert und haben damit erreicht, dass unsere Potenzregeln für einen größeren Bereich von Aufgaben gültig bleiben. Wichtig ist dabei, dass sich keine Widersprüche ergeben. Probieren wir's einmal mit der Multiplikation:

$10 \cdot 0{,}01 = 0{,}1$ oder in Worten: Zehn mal ein Hundertstel ist gleich ein Zehntel. In unserer Schreibweise ist das $10^1 \cdot 10^{-2} = 10^{-1}$. Es klappt also!

Allerdings heißt es jetzt, etwas aufpassen! Denn beim Weiterspinnen unseres Problems kommt nämlich etwas heraus, was aller Logik des Alltags geradezu ins Gesicht zu schlagen scheint. Bleiben wir wieder bei unserem handlichen Zehner.

Wie wir wissen, ist

$$10^2 = 100;\ 10^1 = 10;\ 10^{-1} = \frac{1}{10} \text{ und } 10^{-2} = \frac{1}{100}.$$

Zwischen den Werten 10^2 und 10^{-2} fehlt eigentlich noch der Wert 10^0. Der entsprechende Rechenbefehl: „Schreibe 10 überhaupt nicht auf und multipliziere diesen Zehner auch gar nicht mit sich selbst!“ ist natürlich Unsinn.

Zugegeben, die Sache klingt in dieser Form einigermaßen albern. Doch wie steht es mit unseren Rechengesetzen?

Hierzu ein Beispiel:

$10^3 \cdot 10^0$ ist einfach $10^{3+0} = 10^3$, da 3 + 0 eben wieder nur 3 ergeben kann. Das bedeutet aber, dass wir 10 mit irgendeiner bisher noch nicht bekannten Zahl, die sich hinter dem Rechenbefehl 10^0 versteckt hält, multiplizieren können, ohne dass sich an 10^3, also 1000, etwas ändert. Genau dasselbe gilt von der Teilung mit dieser geheimnisvollen Zahl. Was kann das aber für eine absonderliche Zahl sein, die eine andere bei Multiplikation und Division gar nicht verändert? Wir brauchen nicht lange zu suchen; denn das merkwürdige Kunststück, das hier gefordert wird, kann nur **eine einzige** Zahl, nämlich die **Eins**!

Und deshalb gibt man der „Potenz“ 10^0 den Wert 1.

Wir haben also ein neues Zahlensymbol „erfunden“.

Wozu, wird nun der Leser fragen.

Zur Beantwortung dieser naheliegenden Frage ein Beispiel:

$$10^2 : 10^2 = 10^{2-2} = 10^0 = 1.$$

Ohne die Definition eines neuen Symbols $10^0 = 1$ würde die Potenzregel in diesem Fall versagen. Genauso wäre aber auch die Aufgabe $3^4 : 3^4 = 3^{4-4} = 3^0$ auf diesem Wege nicht lösbar. Natürlich wissen wir längst, was herauskommen muss

$$\frac{3^4}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 1.$$

Und damit erleben wir die Überraschung, dass wir auch $3^0 = 1$ setzen müssen.

Diese absonderliche Beziehung gilt einfach für jede beliebige Zahl.

Es ist, wie wir schon wiederholt erwähnt haben, selbstverständlich, dass alle gefundenen Rechenoperationen bzw. deren grundlegende Vereinfachung durch die „kleinen Zahlen" auch restlos für alle anderen Zahlen gelten müssen. So ist z.B. sicher $15^2 \cdot 15^4 = 15^6$, ebenso $21^{12} \cdot 21^{14} = 21^{26}$. Diese Weisheit hilft uns allerdings nicht viel weiter; denn derartige Rechnereien wie die letztangegebenen Beispiele sind einigermaßen selten. Was wir sehr gut brauchen könnten, wäre die Anwendung der Rechentricks mit unseren hochgeschriebenen Ziffern auf von einander grundverschiedene Zahlen. So wäre z. B. die vereinfachte Lösung der Aufgabe $4261 \cdot 33 \cdot 448$ von praktischem Interesse für uns, wenn wir sie mit unseren kleinen Zahlen ebenso spielend lösen könnten wie etwa die Multiplikation von $10 \cdot 100$.

Der Weg zu diesem Ziel ist nun — wie gewiss schon mancher geahnt haben wird — nicht einmal sehr weit. Wir wissen, es ist $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$ und $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$. Und jetzt kommt die auf den ersten Anblick unsinnig erscheinende Frage: **Wie oft muss ich 10 mit sich selbst multiplizieren, um etwa 500 zu bekommen?** Mathematisch aufgefasst, sieht die Sache dagegen gar nicht so unsinnig aus. Denn ich kann sofort eine ungefähre Antwort auf unsere Frage finden. Nämlich die: 500 liegt zwischen 100 und 1000, also zwischen 10^2 und 10^3. Daher muss ich, um 500 zu bekommen, mit Sicherheit 10 etwas mehr als zweimal und bestimmt weniger als dreimal mit sich selbst multiplizieren!

Bitte ein wenig nachdenken, lieber Leser, die Brille des Vorurteils ablegen und mit ganz unbefangenen Augen die kristallklare Selbstverständlichkeit dieser wunderlichen Tatsache erfassen!

Man hat das tatsächlich längst ausgerechnet und weiß heute ganz genau, dass man die Zehn 2,698 970 004 mal (diese Zahl ist ein unendlich langer nichtperiodischer Dezimalbruch!) mit sich selbst multiplizieren muss, um 500 zu erhalten. Ebenso lässt sich natürlich die Frage beantworten, wie oft man 10 mit sich selbst multiplizieren muss, um etwa *7* zu erhalten. Auch da ist auf den ersten Blick klar, dass diese Zahl kleiner als 1 und größer als 0 sein muss; denn 10^0 ergibt 1, wogegen 10^1 schon 10 ergibt. Tatsächlich heißt die gesuchte Zahl auch 0,845 098 04 ... Und nun wollen wir, um gleich ein paar lehrreiche Rechenbeispiele durchführen zu können, feststellen, wie groß die gewissen „kleinen Zahlen", die angeben, wie oft man 10 mit sich selbst multiplizieren muss, für einige „gewöhnliche Zahlen" sind. So ist zum Beispiel

$$10^{0{,}477\,121\,254} \ldots = 3$$

$$10^{1{,}301\,029\,996} \ldots = 20$$

$$10^{1{,}698\,970\,004} \ldots = 50$$

$$10^{2{,}176\,091\,259} \ldots = 150$$

Jetzt wollen wir ein höchst wichtiges Experiment machen. Und zwar wollen wir untersuchen, ob unsere Rechenregeln (z. B. $10^2 \cdot 10^5 = 10^{2+5} = 10^7$) auch dann Gültigkeit haben, wenn die kleinen Hochzahlen nicht ganze Zahlen, sondern Brüche sind. Also los! $20 \cdot 50$ z. B. ist 1000. Dann muss aber auch ein kleiner „Dreier" herauskommen, wenn ich die Sache mit den kleinen Zahlen durchführe, das heißt, wenn ich nunmehr mit $10^{1{,}301\,029\,996}$ statt 20 und

$10^{1,698\,970\,004}$ statt 50 rechne. Und zu unserer Freude sehen wir, dass diese kleinen Zahlen tatsächlich getreulich Wort halten. Denn es ist

$$10^{1,301\,029\,996} \cdot 10^{1,698\,970\,004} = 10^{1,301\,029\,996 + 1,698\,970\,004} = 10^3 = 1000.$$

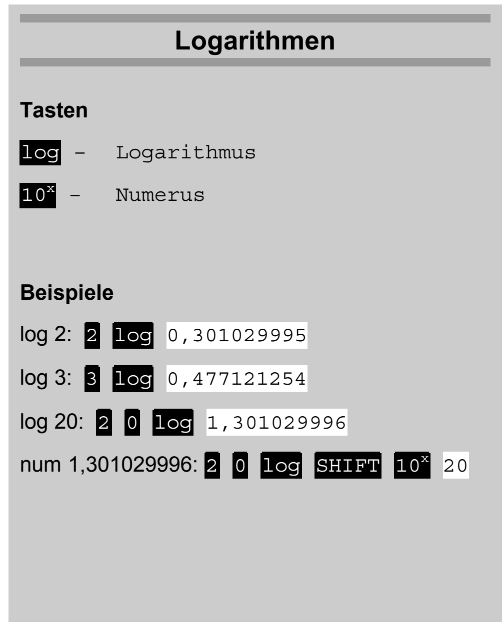
Genauso glänzend verläuft eine zweite Probe mit $3 = 10^{0,477\,121\,254}$ und $50 = 10^{1,698\,970\,004}$. Es muss also die Summe dieser kleinen Zahlen diejenige kleine Zahl sein, die angibt, wie oft wir 10 mit sich selbst multiplizieren, um 150 zu erhalten. Und richtig!

$$3 \cdot 50 = 10^{0,477\,121\,254} \cdot 10^{1,698\,970\,004} = 10^{0,477\,121\,254 + 1,698\,970\,004} = 10^{2,176\,091\,259}$$

Wie wir oben aus unseren Zahlenbeispielen entnehmen, ist $10^{2,176\,091\,259} = 150$, was gezeigt werden sollte. — Eine phantastische Geschichte!

Und nun wollen wir dem Leser auch nicht länger den Namen für diese gebrochenen Hochzahlen vorenthalten. Alle jene kleinen Zahlen, die angeben, wie oft man Zehn mit sich selbst multiplizieren muss, um eine bestimmte Zahl zu erhalten, heißen **Logarithmen** !





Zunächst einmal hat man sich eine weitgehend vereinfachte Schreibweise zurechtgelegt. 3 ist z. B., wie wir vorhin festgestellt haben, gleich $10^{0,477\,12\,12\,54}$. Der Dezimalbruch 0,477 12 12 54 ... ist demnach der Logarithmus, der zu der Zahl 3 gehört. Dabei müssen wir aber stets daran denken, dass dieser Logarithmus die Hochzahl von 10 ist.

Man schreibt daher

$${}_{10}\log 3 = 0,477121254\ ...$$

wobei „log“ einfach die Abkürzung für „Logarithmus“ ist. Das bedeutet also weiter nichts, als eine Schreibweise für die Aussage:

$$0,477\,12\,12\,54\ ... \text{ ist die Hochzahl von 10, mit der } 10^{0,477\,12\,12\,54...} = 3 \text{ ist.}$$

Genauso bedeutet

$$_{10}\log 2 = 0{,}301\ 02\ 99\ 95\ ...,$$

dass $10^{0,301\ 02\ 99\ 95...} = 2$ ist, und so fort.

Die Logarithmen, die wir bisher kennengelernt haben, sind alle auf unsere „braven Zehner“ bezogen. Es gibt auch Logarithmen-Systeme, die mit anderen Zahlen aufgebaut werden, die also eine andere „Basis“ als 10 haben. Zum vereinfachten Multiplizieren, Dividieren usw. sind aber nur die Zehner-Logarithmen geeignet. Wir werden es also beim Rechnen immer nur mit diesen Logarithmen zu tun haben. Es ist also gar nicht nötig, dass wir jedes Mal noch auf die 10 besonders hinweisen. Außerdem wollen wir auch die Punkte weglassen, die ja lediglich andeuten sollen, dass es sich um einen unendlichen Dezimalbruch handelt. Das wissen wir ja ein für allemal!

Wir schreiben also die Zehner-Logarithmen einfach

$$\log 2 = 0{,}301\ 02\ 99\ 95$$

$$\log 3 = 0{,}477\ 12\ 12\ 54,$$

was so ausgesprochen wird: „Der **Logarithmus** von 3 ist gleich 0,477 12 12 54“ und so fort. Natürlich ist auch eine Umkehrung dieses „Verfahrens“ möglich und nötig, nämlich das Suchen jener Zahl, die zu einem bestimmten Logarithmus gehört. Das schreibt man so:

$$\text{num } 0{,}477\ 12 = 3$$

und spricht es: „Der **Numerus** (= die Zahl), der zu dem Logarithmus 0,477 12 gehört, ist 3“.

Nun stellen wir ziemlich unvermittelt die Frage:

Wie sehen die Logarithmen von 0,3; 3; 30; 300 und 3000 aus?

An Hand der vorhin gewonnenen Erkenntnisse wissen wir auch das sofort ungefähr. Wir können uns diese Zahlen ja als Produkte vorstellen, nämlich so:

$0{,}3 = 3 \cdot 10^{-1}$, $3 = 3 \cdot 10^{0}$, $30 = 3 \cdot 10^{1}$, $300 = 3 \cdot 10^{2}$ usw.

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
0{,}003 = 3 \cdot 10^{-3} &= 10^{0,477\ 121\ 254} \cdot 10^{-3} = 10^{0,477\ 121\ 254\ -\ 3}\\
0{,}03 = 3 \cdot 10^{-2} &= 10^{0,477\ 121\ 254} \cdot 10^{-2} = 10^{0,477\ 121\ 254\ -\ 2}\\
0{,}3 = 3 \cdot 10^{-1} &= 10^{0,477\ 121\ 254} \cdot 10^{-1} = 10^{0,477\ 121\ 254\ -\ 1}\\
3 = 3 \cdot 10^{0} &= 10^{0,477\ 121\ 254} \cdot 10^{0} = 10^{0,477\ 121\ 254\ +\ 0}\\
30 = 3 \cdot 10^{1} &= 10^{0,477\ 121\ 254} \cdot 10^{1} = 10^{0,477\ 121\ 254\ +\ 1}\\
300 = 3 \cdot 10^{2} &= 10^{0,477\ 121\ 254} \cdot 10^{2} = 10^{0,477\ 121\ 254\ +\ 2}\\
3\ 000 = 3 \cdot 10^{3} &= 10^{0,477\ 121\ 254} \cdot 10^{3} = 10^{0,477\ 121\ 254\ +\ 3}\\
30\ 000 = 3 \cdot 10^{4} &= 10^{0,477\ 121\ 254} \cdot 10^{4} = 10^{0,477\ 121\ 254\ +\ 4}
\end{aligned}$$

Damit kommen wir aber zu einigen höchst interessanten und wichtigen Feststellungen. Die sozusagen „zahleneigenen“ Teile des Logarithmus wiederholen sich immer wieder:

log 0,003	=	0,477 121 254 – 3	=	– 2,522 878 745
log 0,03	=	0,477 121 254 – 2	=	– 1,522 878 745
log 0,3	=	0,477 121 254 – 1	=	– 0,522 878 745
log 3	=	0,477 121 254	=	0,477 121 254
log 30	=	0,477 121 254 + 1	=	1,477 121 255
log 300	=	0,477 121 254 + 2	=	2,477 121 255
log 3000	=	0,477 121 254 + 3	=	3,477 121 255
log 30 000	=	0,477 121 254 + 4	=	4,477 121 255
log 300 000	=	0,477 121 254 + 5	=	5,477 121 255

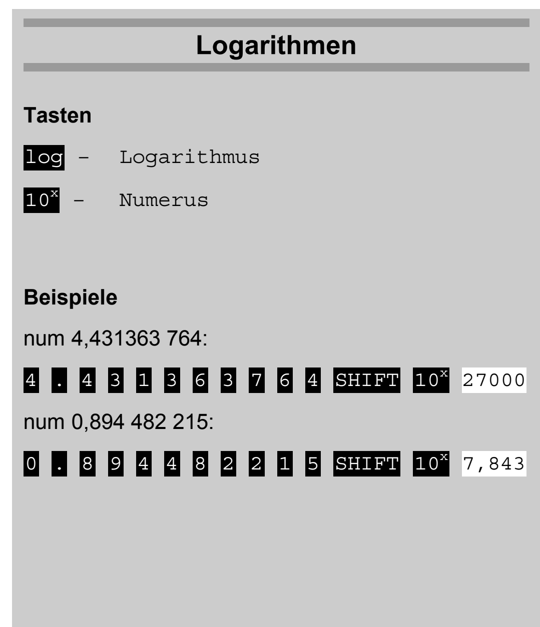
Zusammengefaßt ergibt sich:

1. Der **Logarithmus ist**, von Ausnahmen abgesehen, **ein Dezimalbruch** (z.B. log 20 = 1,301 029 996). Er besteht aus der **Kennziffer** (in unserem Beispiel die 1), wie die Ziffer vor dem Komma genannt wird und der **Mantisse** (301 029 996), das sind die Ziffern nach dem Komma.

2. Die Logarithmen von allen Zahlen mit gleicher Ziffernfolge (z.B. 173; 1,73; 0,0173) haben **dieselbe Mantisse**.

Ebenso einfach ist das ganze Verfahren, wenn es sich darum handelt, die zu einem bestimmten Logarithmus gehörige Zahl zu finden. Es wäre z.B. der Logarithmus 4,431 363 764 gegeben, die Aufgabe schreibt man folgendermaßen: num 4,431 363 764 = ?





Das Ergebnis ist also 27 000.

1. Die Multiplikation.

So wie $10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$ ist, so gilt allgemein das Gesetz:

Der Logarithmus des Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

Wenn ich also drei Zahlen miteinander zu multiplizieren habe, so muss ich die Logarithmen dieser drei Zahlen bestimmen; diese drei ergeben dann, zusammengezählt, den Logarithmus des Produktes. Daher gilt auch:

Die Multiplikation von Zahlenwerten läuft auf eine Addition ihrer Logarithmen hinaus.

Schön! Wir hätten etwa das Produkt 84,734 · 2001,2 · 0,0414 auszurechnen. Wie machen wir's? Sehr einfach! Erst bestimmen wir die Logarithmen, schreiben sie untereinander und addieren:

log 84,734	=	1,928 057 708
log 2001,2	=	3,301 290 494
log 0,0414	=	– 1,382 999 659
log Produkt	=	3,846 348 544
num 3,846 348 544	=	7020,184 785

womit unsere Multiplikation beendet ist:

$$84{,}734 \cdot 2001{,}2 \cdot 0{,}0414 = 7020{,}184\ 785.$$

2. Die Division.

Wie wir schon wissen, muss auch die Umkehrung der Multiplikation gelten. 10 000 : 100 = 100 oder $10^4 : 10^2 = 10^{4-2} = 10^2$. Haben wir zwei Zahlen miteinander zu dividieren, so müssen wir den Logarithmus des Divisors (Teilers) von dem des Dividenden (Teilenden) abziehen.

Ein Beispiel hierzu: Es wäre 3884 : 5287 = zu lösen. Wieder berechnen wir die Logarithmen:

log 3884	=	3,589 279 221
– log 5287	=	3,723 209 310
log Quotient	=	– 0,133 930 089
num – 0,133 930 089	=	0,734 632 116

womit unsere Division beendet ist:

$$3884 : 5287 = 0{,}734\ 632\ 116.$$

3. Potenzieren

Wie viel ist $2{,}36^3$, d. h. die dritte Potenz von 2,36? — Das können wir längst rechnen. Potenzieren ist ja weiter nichts als wiederholtes multiplizieren mit derselben Zahl.

Also: $2{,}36^3 = 2{,}36 \cdot 2{,}36 \cdot 2{,}36$ und weiter

$$
\begin{array}{rl}
\log 2{,}36 & = 0{,}372\,912\,003 \\
+\ \log 2{,}36 & = 0{,}372912\,003 \\
+\ \log 2{,}36 & = 0{,}372912\,003 \\
\hline
\log 2{,}36^3 & = 1{,}118\,736\,009
\end{array}
$$

Halt! Das geht aber noch viel einfacher. 0,372 91 + 0,372 91 + 0,372 91 ist nichts anderes als $3 \cdot 0{,}372\,91$. Damit erkennen wir bereits eine sehr bequeme Rechenregel für das Potenzieren:

$$\log 2{,}36^3 = 3 \cdot 0{,}372\,912\,003 = 3 \cdot \log 2{,}36.$$

Ehe wir angesichts dieser überraschenden Erkenntnis das Weiterrechnen vergessen, schnell das Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
\log\ 2{,}36^3 &= 1{,}118\,736\,009 \\
2{,}36^3 &= 13{,}144\,256
\end{aligned}
$$

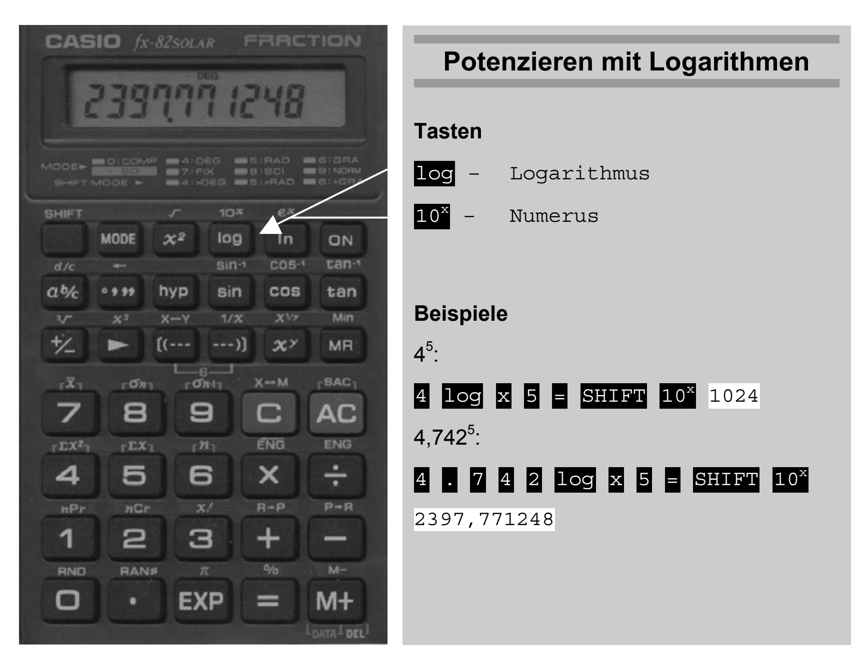
Doch nun zu unserer Rechenregel! Wenn unsere Überlegungen richtig waren und uns der Zufall keinen Streich gespielt hat, dann müsste sich ja z.B.

$$4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$$

logarithmisch ganz einfach so berechnen lassen:

$$\log 4^5 = 5 \cdot \log 4 = 5 \cdot 0{,}602\,059\,991 = 3{,}010\,299\,957.$$

Die Berechnung von num 3,010 299 957 ergibt 1024 und das ist tatsächlich der richtige Wert.



Also stimmt unsere Regel und wir können mit Hilfe der Logarithmen mühelos und nach Herzenslust potenzieren. Wie groß ist z. B. die fünfte Potenz von 4,742, das heißt die Zahl, die herauskommt, wenn man 4,742 fünfmal mit sich selbst multipliziert? Rasch ist der

Logarithmus gefunden, der 0,675 961 549 beträgt. Und ebenso schnell ergibt sich 5 · 0,675 961 549 = 3,379 807 748. Dazu die betreffende Zahl gesucht, also num 3,379 807 748, ergibt: 2397,771 248. Es ist also $4{,}742^5 = 2397{,}771\ 248$.

4. Wurzelziehen

Quadratwurzel z. B. aus 13,64 bedeutet, suche die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 13,64 ergibt. $\sqrt{13{,}64}$ = ? Das ist für uns zunächst ein großes Fragezeichen. Einen Namen können wir diesem „Kind“ unserer Zahlenfamilie aber wenigstens geben. Rufen wir es kurz „Max“.

So ein Unsinn! Max mit sich selbst multipliziert soll 13,64 sein? So kommen wir doch nicht weiter! Daneben gehauen, lieber Leser! In der Mathematik benutzt man nur einen noch kürzeren Namen. Taucht bei irgendwelchen Rechnungen eine zunächst noch unbekannte Zahl auf, so nennt man sie „**x**“. In unserem Beispiel ist x die Quadratwurzel aus 13,64. Von diesem x wissen wir nur, dass das Quadrat 13,64 ist.

$$x = \sqrt{13{,}64} \quad \text{und} \quad x^2 = 13{,}64\,.$$

Da steckt wirklich nicht mehr dahinter als z. B; bei $3^2 = 9$. Auf beiden Seiten (der Gleichung, wie man sagt) steht genau dasselbe, nur verschieden geschrieben. So ist auch 9 · 9 dasselbe wie $3^2 \cdot 3^2$ und $\log 9 = \log 3^2$ usw.

Nach diesen gedanklichen Vorbereitungen bereitet uns das Logarithmieren von $x^2 = 13{,}64$ keine absonderlichen Schwierigkeiten mehr und auch die folgende Rechnung wird uns durchaus verständlich sein.

$$\log x^2 = 2 \cdot \log x = \log 13{,}64 = 1{,}134\ 814\ 37.$$

Damit wissen wir nun, welchen Wert **zweimal** log x hat, nämlich 1,134 814 37. **Einmal** log x ist dann einfach der halbe Wert

$$\log x = \frac{1}{2} \log 13{,}64 = 0{,}567\ 407\ 185.$$

Die Berechnung von num 0,567 407 185 ergibt 3,693 237 063. Also

$$x = \sqrt{13{,}64} = 3{,}693\ 237\ 063\,.$$

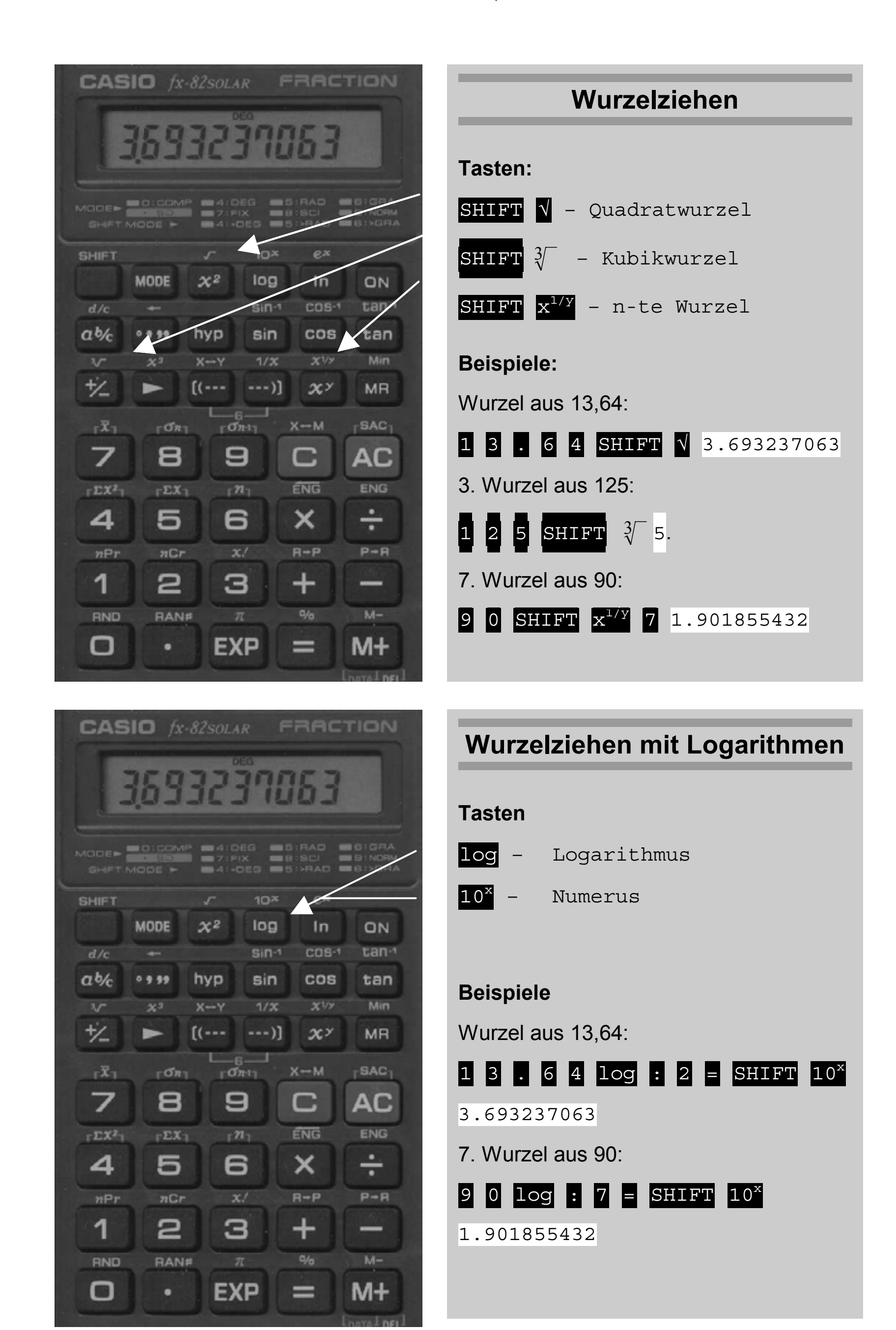
Wir sind von der Potenz der Wurzel unter Benutzung der uns bereits bekannten und bequemen logarithmischen Potenzregel zur Wurzel selbst gekommen. Genauso können wir bei ganz beliebigen Wurzeln verfahren. Probieren wir es gleich noch mit der dritten Wurzel aus 125. Setzen wir $\sqrt[3]{125} = x$, dann muss also x dreimal mit sich selbst multipliziert 125 sein

$$\log x^3 = 3 \cdot \log x = \log 125 = 2{,}096\ 910\ 013.$$

Man rechnet also zunächst 3 mal log x aus und ein Drittel davon ergibt log x.

$$\log x = \frac{1}{3} \log 125 = 0{,}698\ 970\ 004$$

$$x = \sqrt[3]{125} = \text{num } 0{,}698\ 970\ 004 = 5.$$



Dabei fällt uns noch ein interessanter Zusammenhang auf.

Es war doch in den obigen Beispielen

$$\log x = \frac{1}{2} \log 13{,}64 \quad \text{und} \quad \log x = \frac{1}{3} \log 125$$

$$x = \sqrt{13{,}64} \qquad\qquad x = \sqrt[3]{125}$$

Wir können demnach auch schreiben

$$\log \sqrt{13{,}64} = \frac{1}{2} \log 13{,}64 \text{ und } \sqrt[3]{125} = \frac{1}{3} \log 125.$$

Und das ist fürwahr ein überraschendes Ergebnis. — Worauf es also bei unserer Wurzelzieherei ankommt: Man dividiert einfach den Logarithmus der vorgegebenen Zahl durch den „Grad" der gesuchten Wurzel. Wie groß ist z. B. die 7. Wurzel aus 90, d. h. diejenige Zahl, die siebenmal mit sich selbst multipliziert 90 ergibt? Her mit dem Logarithmus von 90! Er ist 1,954 242 509. Das ist nun durch 7 zu dividieren. Es ergibt sich folgende Rechnung:

$$1{,}954\ 242\ 509 : 7 = 0{,}279\ 177\ 501.$$

Suchen wir zu diesem Logarithmus 0,279 177 501 die entsprechende Zahl, so erhalten wir 1,901 855 432.

Aber noch etwas anderes. Wir gingen bisher immer von der Zahl 10 aus und stellten die Frage: Wie oft muss ich 10 mit sich selbst multiplizieren? ... und so fort. Genau so gut könnte man aber fragen: Wie oft muss ich 8 oder 15 oder 341 mit sich selbst multiplizieren, um eine andere gegebene Zahl, etwa 110, zu erhalten? Als Basis eines Logarithmensystems könnte man also schließlich jede beliebige Zahl verwenden. Praktisch jedoch hat sich fast ausschließlich die Basis 10 eingeführt. Man nennt diese auf der Grundzahl 10 aufgebauten Logarithmen die **gemeinen** oder **Briggschen** Logarithmen. Daneben hat nur ein einziges anderes System Bedeutung erlangt, nämlich das sogenannte **natürliche** System der Logarithmen.

Deren Basis ist die wichtige Zahl

$$e = 2{,}71\ 828\ 182\ 845\ 904$$

die in einem unendlichen Dezimalbruch endet und überdies **transzendent** ist. Leider müssen wir hier den Leser bitten, uns das Gesagte glatt zu glauben. Denn eine Ableitung und sämtliche Beweise für die überragende Stellung und Wichtigkeit dieser Zahl sind so schwierig, dass sie in das diesem Buche zugrunde liegende Programm einfach nicht mehr hineinpassen. Schon die schüchternen Versuche, etwas mehr noch von dieser Zahl erfahren zu können, werden die übergroßen Schwierigkeiten jeder weiteren Diskussion erläutern. Die genannte Zahl, seit **Euler** allgemein *„**e**"* genannt, kann man sich durch eine sogenannte Reihe entstanden denken. Wir zeigen diese Reihe, ohne auf die etwas schwierige Theorie dieser mathematischen Darstellungen einzugehen. Allein schon das bloße Bild dieser Reihe mag dem Leser eine Vorstellung davon geben, wie der absonderliche Wert 2,718 . . . mit allen anderen Zahlen verbunden ist. Es gilt nämlich

$$e = 1 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} \ldots,$$

wenn man sämtliche Zahlen bis in die Unendlichkeit so zusammensetzt und dann alles zusammenzählt.

Und schließlich noch ein eigenartiger Zusammenhang unserer Zahl *e,* mit zwei anderen, eigentlich nicht weniger wichtigen Größen. Die eine Größe ist das spukhafte *i*, die Wurzel aus

minus eins, eine Zahl, die auf unserer biederen Zahlengeraden nicht vorkommt, wir kennen sie schon einigermaßen. Und schließlich gesellt sich noch eine dritte Zahl zu unseren beiden: die nicht weniger eigenartige Zahl π, also 3,14 159 26 54..., die angibt, um wieviel mal größer der Kreisumfang ist als der Kreisdurchmesser.

Neben diesen besonderen, geradezu unheimlich ausgezeichneten Größen macht unser biederer Einser einen geradezu tölpelhaft-nüchternen Eindruck. Aber wie nah ist er jenem wunderlichen Zahlenkleeblatt verwandt! Denn wie schon Euler 1748 erkannte, ist es von diesem düsteren Trifolium zu unserer Eins gar nicht so weit. Es gelten die eigentümlichen überraschenden Beziehungen:

$$e^{2i\pi} = 1 \quad \text{und} \quad e^{i\pi} = -1$$

Was in unsere bürgerliche Sprache übertragen heißt: Multiplizierst du 2,718 281 8 so oft mit sich selbst, wie das Produkt 2 mal $\sqrt{-1}$ mal 3,14 159 26... ausmacht, dann ist das Ergebnis Eins. Und ebenso: Multiplizierst du 2,71 828 18 . . . so oft mit sich selbst, wie das Produkt von $\sqrt{-1}$ mal 3,14 15926 ... ausmacht, dann ist das Ergebnis Minus Eins.

Ich weiß, dass das die wenigsten Leser „verstehen“ werden, zum mindesten nicht nach dem kargen Wissen verstehen können, das wir bisher vermitteln konnten. So mögen denn diese beiden Ausdrücke — übrigens leicht zu merken! — etwa so aufgefasst werden wie uralt-geheimnisvolle Steine, die mit unentzifferbaren Runen bedeckt sind. Man werte daher die beiden vorhin genannten Gleichungen, den „Brückenkopf“ ins Reich des uns Unvorstellbaren, so:

Wenn man auch kaum ahnen kann, was das absonderliche Mal bedeutet, so ist es doch von Wert, zu wissen, dass es überhaupt da ist und wohin der Weg führt, vor dessen Region die merkwürdigen Beziehungen wie eine Warnung aufgerichtet stehen.



Wir stellen vor: „Herr Kosinus“!

Wie schon eingangs erwähnt, ist es uns nicht möglich, mehr als nur einige der wichtigsten Wunder des ungeheuren Gartens kennen zu lernen, den wir betreten haben. Wir müssen doppelt und dreifach Maß halten, wenn der Leser auf angenehme Weise belehrt und nicht verwirrt oder gar abgestoßen werden soll. Diese Selbstbeschränkung zwingt uns daher mitunter zu absonderlichen Sprüngen. Und so wagen wir auch diesmal einen kühnen Satz, lassen so und so viele Erscheinungen links liegen und wenden uns einem Gebiet zu, das wieder von den meisten gehasst und gefürchtet, demgemäss auch nie recht verstanden, im praktischen Leben jedoch gleichfalls von grundlegender Bedeutung ist.

Es ist die **Geometrie**, mit der wir uns nun beschäftigen wollen. Schon der Name erschreckt ein wenig. Denn auch hier erleben wir das alte Elend: Der Auskunftssuchende gerät schon bei den Anfangsgründen dieses merkwürdigen und wundersamen Gebietes der Mathematik in ein wüstes Gestrüpp sich kreuzender Linien, stolpert über eine ungewohnte, schwerverständliche Ausdrucksweise und kommt trotz allem Eifer doch nicht ans Ziel, nämlich zu einem spielend erlernten Verstehen. Daher müssen wir es auch hier wieder rein praktisch, geradezu derb-handgreiflich anfangen.

Wie wohl jeder weiß, bildet das Dreieck den Grundstein aller Geometrie. Immer wieder geht’s um Dreiecke, und wer sich in der Anatomie dieses an sich so einfachen Gebildes nicht auskennt, dem bleibt der Weg zum Verständnis aller höheren geometrischen Künste verrammelt.

Warum?

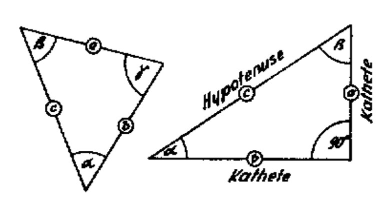
Diese Frage ist leicht zu beantworten. Das Dreieck ist die einfachste ebene geometrische Figur und damit also der Grundstock, das Fundament jeglicher geometrischen Vorstellung, das einfachste Gebilde, auf das man verwickelt gebaute andere Figuren zurückführen kann. Gelingt es, ein geometrisches Problem so anzupacken, dass man ihm mit Beziehungen zum Dreieck an den Leib rücken kann, so ist die Sache eigentlich schon gelöst. Ein „Eineck“ ist uns so gut wie unvorstellbar, ein von Geraden begrenztes „Zweieck“ ist in der landläufigen ebenen, sogenannten euklidischen Geometrie nicht denkbar und findet sich erst zum Beispiel auf der Kugeloberfläche, und so fort.

Was ein Dreieck ist, weiß wohl jeder: Es hat drei Seiten. Umfang, Flächeninhalt und — da beginnt es eben schon mit dem Verständnis zu hapern — auch drei Winkel. Lassen wir zunächst die drei Winkel aus dem Spiel. Vergegenwärtigen wir uns, was wir sonst von „handgreiflicheren“ Beziehungen am Dreieck wissen oder wissen sollten. Wir stoßen da vor allem auf einen Satz, den die Menschheit schon vor Jahrtausenden gefunden hat und der geradezu unentbehrlich für alle unsere mathematisch-geometrischen Erkenntnisse geworden

ist. Es ist der bekannte pythagoreische Lehrsatz, zumeist kurz „**Pythagoras**“ und in der mittelalterlichen Schülersprache „pons asinorum“, die Eselsbrücke, genannt. Wärmen wir seine uralte Weisheit wieder auf.

Ein besonders „nettes“ Dreieck ist bekanntlich jenes, dessen drei Seiten gleich lang sind, was, nebenbei bemerkt, auch zwangsläufig zur Folge hat, dass die drei Winkel gleich groß sein müssen. Im Grunde genommen ist aber ein sogenanntes rechtwinkliges Dreieck noch viel „netter“. Sein Hauptkennzeichen besteht darin, dass zwei Seiten rechtwinklig aufeinanderstoßen, in einer Ecke also einen Winkel von genau 90 Grad bilden.

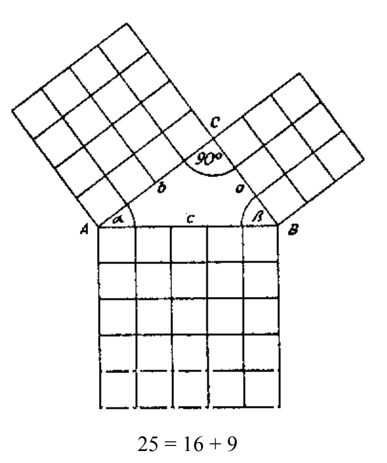
Solche Dreiecke sind diejenigen, auf denen die weitere Geometrie aufgebaut werden kann. Der Grund für die „Beliebtheit“ dieser Dreiecke ist auch leicht einzusehen. Weil eben ein Winkel, nämlich der 90-gradige, von vornherein einen bestimmten Wert besitzt, brauchen wir nur die beiden anderen im Auge zu behalten. Das vereinfacht die ganze Angelegenheit außerordentlich und bedingt, dass auch die drei Seiten stets einem bestimmten Gesetz, nämlich dem erwähnten Pythagoras, gehorchen, und zwar ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, dass die Maßzahl der längsten Seite mit sich selbst multipliziert genau soviel ausmacht wie die Summe, die herauskommt, wenn man die Quadrate der beiden anderen Seitenzahlen zusammenzählt. Bezeichnet man, wie herkömmlich, die längste Seite mit *c*, die beiden kürzeren mit *a* und *b,* so ergibt sich die vielzitierte Formel $c^2 = a^2 + b^2$, oder noch etwas leichter verständlich hingeschrieben:



Winkel und Seiten am Dreieck

$$(\text{Längste Seite})^2 = (\text{eine kürzere Seite})^2 + (\text{andere kürzere Seite})^2.$$

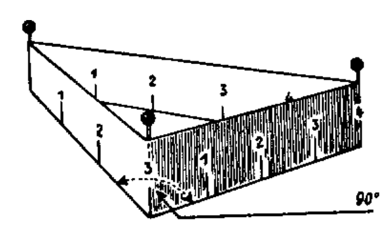
Das Erfreuliche, aber eigentlich Merkwürdige dabei ist, dass es bestimmte Dreiecke gibt, bei denen die Seitenzahlen durch „einfache“ ganze Zahlen dargestellt werden, wobei der Pythagoras aber doch stimmt. So gibt es zum Beispiel ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten 5, 4 und 3. Denn es stimmt ja: 25 = 16 + 9.



25 = 16 + 9

Und aus jahrtausendelang zurückliegender Vergangenheit hat sich die Wichtigkeit solcher Dreiecke bis in unsere Zeit hinübergerettet. Man kann nämlich die hier berührte Beziehung auch umdrehen, indem man aus dem Pythagoras die „Kunst“ ableitet, genaue rechte Winkel herzustellen. Man nehme z.B. eine genau 40cm lange, etwas kräftige, Schnur und mache mit Tinte oder sonst wie im Abstand von 8 cm von dem einen und 15 cm von dem anderen Ende je ein Markierungszeichen. Steckt man die beiden Enden mit einer Stecknadel —etwa auf einem Pappdeckel — zusammen und spannt dann die Schnur mit Hilfe von zwei weiteren Nadeln so zu einem Dreieck aus, dass an jedem Strich ein Eckpunkt liegt, so bekommt man mit großer Genauigkeit ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten 8 cm, 15 cm und 17 cm.

Konstruktion des rechten Winkels mit Hilfe des „Pythagoras“. Schneidet und klebt man ein Papierband so zu, dass die einzelnen Seiten des nun entstehenden Dreiecks die Längen von 3, 4 und 5 cm haben, so entsteht zwischen den beiden Seiten von 3 und 4 cm Länge ein rechter Winkel.



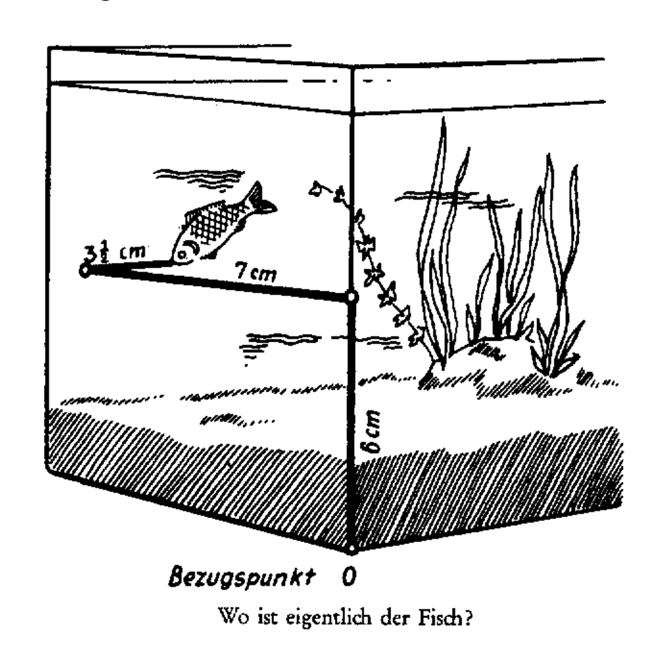
Das ist ein uralter Kniff; schon bei den alten Ägyptern legten die „Harpedonapten“ genannten Priester auf ähnliche Weise die rechten Winkel zurecht, wenn die Grundrisse zu Tempeln oder Profanbauten gelegt werden sollten. Auch die alten Inder arbeiteten mit dem gleichen Verfahren, allerdings mit anderen Zahlen, nämlich 15, 36, 39. Man nennt daher zuweilen auch heute noch das 3-4-5-Dreieck ein „ägyptisches“ und ein solches mit dem Seitenverhältnis 5 : 12 : 13 oder 15 : 36 : 39 ein „indisches“.

Hier sei uns eine kleine Abschweifung erlaubt. Wir stehen bei diesen uralten, nüchternen Wahrheiten nämlich schon wieder vor einem mathematischen Rätsel, dem man überdies bis heute noch nicht beikommen konnte: nämlich vor dem berühmten **Fermatschen Problem**. Dass es unendlich viele Zahlen gibt, die sich mit ihren Quadraten so wie 3, 4, 5 zusammenkuppeln lassen, weiß man. Merkwürdigerweise aber gibt es keine ganzen Zahlen, die das gleiche „können“, wenn man versucht, ihre Kuben, also ihre dritten Potenzen, auf diese Weise zusammenzubringen. Heute ist schon der Beweis erbracht, dass es derartige Zahlen bis zur hundertsten Potenz nicht geben kann. Ob sich aber in höheren Potenzen nicht doch wieder Zahlen finden — das weiß man eben noch nicht.

Kehren wir nun zu unserem rechtwinkligen Dreieck zurück, das wir jetzt ein wenig genauer „anatomisch“ betrachten wollen, und zwar setzen wir die Zange unserer Untersuchung gerade da an, wo der allgemein verbreiteten Meinung nach die ganze Angelegenheit schwierig und undurchsichtig wird, nämlich bei den Winkeln. Mit den Winkeln aber auf vertrauten Fuß zu kommen, ist praktisch außerordentlich wichtig. Denn, wie schon die allereinfachste Überlegung beweist, die von alltäglich-selbstverständlichen Vorgängen ausgeht, spielen die Winkel in der uns umgebenden Welt eine wichtige Rolle. Man erinnere sich nur der Binsenwahrheit: Je größer der Winkel ist, unter dem eine Tür offen steht, desto größer ist die freigegebene Fläche. Derartige Beispiele für die gewaltige Macht der Winkel lassen sich in jedem Zimmer, auf jedem Schreibtisch zu Hunderten und Tausenden finden. Jeder weiß, dass es auch ein Maß für die Größe von Winkeln gibt, ein praktisches und erprobtes Maß, nämlich die bekannte Einteilung in Grade, Minuten und Sekunden. Ein voller Winkel — nämlich einmal „rundherum“ — hat demnach 360 Grad, ein rechter Winkel 90 Grad und so fort. Aber einen Nachteil hat diese Gradbezeichnung doch: Es lässt sich mit ihr nämlich nicht rechnen, richtiger gesagt, nur sehr beschränkt rechnen. Man kann zum Beispiel von einem Winkel, der 68 Grad misst, einen solchen von 45 Grad abziehen. Aber die Auswirkung der Winkelgröße auf ihre Umgebung oder, richtiger gesagt, die Veränderung der Seitenlängen, die ein veränderter Winkel bestimmt, lässt sich mit der Gradbezeichnung allein nicht ermitteln. Wenn man daher mit Winkelgrößen rechnen will, muss man die Sache anders anpacken und andere Eigenheiten des Winkels in Rechnung setzen. Man hat nun derartige „Eigenheiten“ der Winkel herausgeklügelt und ihnen in ihrer Gesamtheit einen Namen gegeben, allerdings wieder einmal einen recht bösartig klingenden, nämlich „**Winkelfunktionen**“. Aber, bitte, nicht erschrecken! Denn es ist wirklich nur der Name bedrohlich, die Sache an sich ist ziemlich einfach und harmlos. Bevor wir aber näher darauf eingehen, wollen wir ein wichtiges Hilfsmittel kennen lernen. Wir wollen lernen, unsere mathematischen Erkenntnisse aufzuzeichnen bzw. umgekehrt, geometrische Verhältnisse in die Sprache der Mathematik zurückzuübersetzen. Wieder beginnt die Sache mit einem anspruchsvollen Fremdwort, nämlich mit dem sogenannten **Koordinatensystem**. Das Schrecklichste an der ganzen Angelegenheit ist wieder einmal — der Name ☺.

Angenommen, wir hätten ein genau rechteckiges Aquarium, meinetwegen unten mit Sand belegt und mit Pflanzen besetzt. Und in diesem Schaubecken schwimme behaglich ein Fisch herum. Wir stellen nun die vielleicht im ersten Augenblick überraschende, aber jedenfalls berechtigte Frage: Wo ist jetzt eigentlich der Fisch? Dem alltäglichen Sprachgebrauch

folgend, wird man die jeweilige Lage des mehr oder weniger lebhaft in seinem Becken herumtummelnden Tieres folgendermaßen bestimmen: Der Fisch ist ziemlich genau in der Mitte, jetzt schwimmt er mehr in die rechte hintere Ecke, jetzt ist er ganz nah über dem Bodengrund, und so fort. Das ist alles schön und gut, klingt aber doch außerordentlich unbestimmt und verwaschen. Sind wir genau und wollen wir tatsächlich die Lage des Fisches in seinem Becken angeben, so müssen wir zunächst eine Forderung erfüllen, welche die meisten Menschen zwar als selbstverständlich empfinden, aber kaum je bewusst erkennen werden. Es ist nämlich zuerst einmal ein Punkt festzulegen oder anzunehmen, auf den wir die Lage des Tieres beziehen. Nun, ihrer haben wir ja genug an unserem Aquarium. Nehmen wir an, wir gingen von dem linken unteren vorderen Eckpunkt (0) unseres Beckens aus. Jetzt ist es uns ein leichtes, anzusagen, wo sich der Fisch oder, wenn wir noch genauer sein wollen, der Spitzenpunkt seines Maules befindet. Wir können nämlich sagen: Der Fisch steht jetzt 7 cm von der Ecke entfernt, dann müssen wir $3\frac{1}{2}$ cm ins Aquarium hinein, und über dem so erhaltenen Punkt steht nun die Maulspitze 6 cm über dem Boden. Wie sofort klar wird, ist hiermit die Lage des Fisches eindeutig und widerspruchsfrei bestimmt, und damit haben wir weiter nichts als ein „**räumliches Koordinatensystem**“ aufgestellt. Wir messen entlang oder parallel den einzelnen Achsen. Welches die drei Achsen sind, liegt auch sonnenklar zutage: es sind die vordere untere Kante, die im Eckpunkt senkrecht aufragende linke Kante und die vom Eckpunkt links nach hinten ziehende Kante. Weil es sich im Raum bequemer denken lässt, haben wir dieses Beispiel zuerst gewählt. Bei unserer Winkelbetrachtung brauchen wir aber zunächst nicht den Raum, sondern bleiben einfach in der Ebene, was die Sache insofern vereinfacht, als wir jetzt nur mehr mit **zwei** Achsen, das heißt Richtungen und Abmessungen, zu tun haben, die wir uns auf bewährte Weise wieder konstruieren wollen.

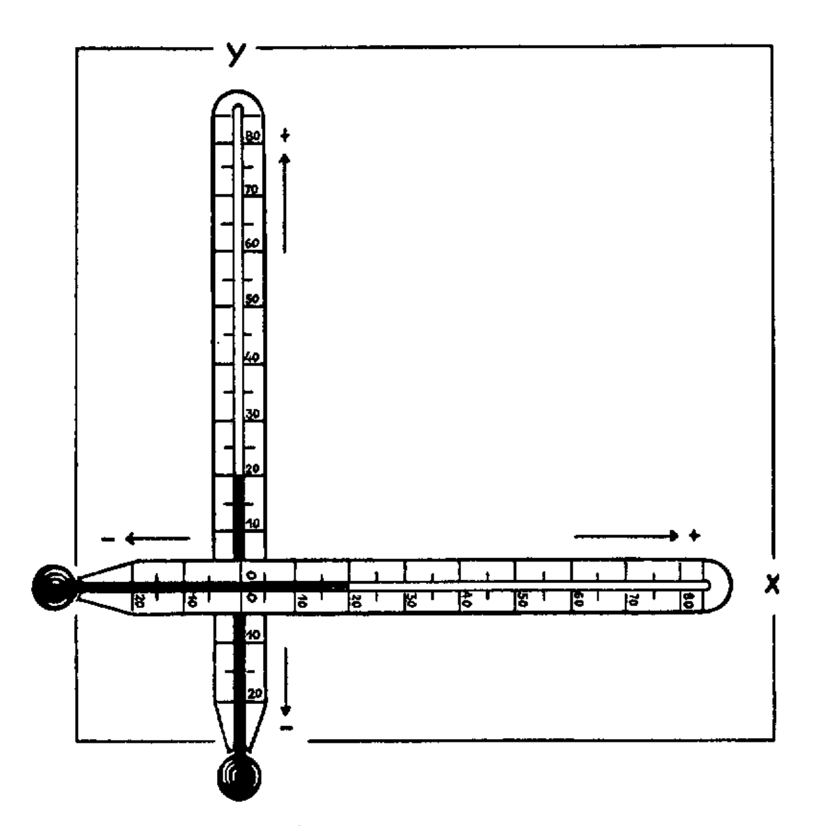


Wo ist eigentlich der Fisch?

Dazu wiederum ein Bild, das zum besseren Verständnis des Koordinatensystems dienen soll. Wir müssen plötzlich verreisen, aber in der Zwischenzeit soll uns der Elektriker in unserer Stube eine bisher nicht vorhanden gewesene Deckenlampe einbauen. Zwei Möglichkeiten haben wir, um dem Manne, mit dem wir wegen Zeitmangels nicht mehr sprechen können, die Lage des Ortes anzugeben, wo die Lampe an der Zimmerdecke hängen soll. Entweder wir machen gleich unter der Decke mit Bleistift oder Kohle ein Zeichen, oder aber was bequemer ist, wir schreiben ihm: „Die Lampe wird, von der Ecke aus, in welcher der Ofen steht, 4 m weit zur Fensterseite hin gerechnet und dann 2 m weit ins Zimmer hinein angebracht.“ Jetzt ist ein Irrtum nicht mehr möglich. Wir haben aber auch hier ein Koordinatensystem aufgestellt, und zwar ist diejenige Ecke der Deckenfläche, die in dem Ofenwinkel mit den Wänden entsteht, der „**Koordinatenursprungspunkt**“; die beiden Kanten an der Decke, auf die sich unsere Angaben bezogen haben, nennt man die Achsen des Systems. Im wesentlichen besteht also ein ebenes Koordinatensystem aus zwei einander (zumeist) rechtwinklig kreuzenden Geraden und dem gemeinsamen Schnittpunkt.

Natürlich ist hier noch einiges zu bemerken. Wir kehren dazu mit unserer Koordinatenweisheit aufs Papier, in die Ebene zurück, spannen ein weißes Blatt auf ein Reißbrett, wählen ungefähr in dessen Mitte einen Punkt und ziehen durch diesen mit Reißschiene und Dreieck eine senkrechte und waagerechte Gerade. Wir haben hier also wieder einen „Koordinatenursprungspunkt“ und zwei Achsen. Dadurch zerfällt die ganze Papierfläche in vier Teile, genauso wie ein Uhrenzifferblatt durch die Viertelstundenstellungen des großen Zeigers in vier Teilstücke. Man nennt sie im Koordinatensystem die „**Quadranten**“. Weiter: Unsere beiden Achsen müssen auch noch „getauft“ werden. Wir merken uns wieder befremdlich klingende Namen für unschuldige Dinge: Die **waagerechte** Gerade, die **waagerechte** Achse, heißt Abszissenachse oder ***x*-Achse**, die **senkrechte** Achse Ordinatenachse oder ***y*-Achse**.

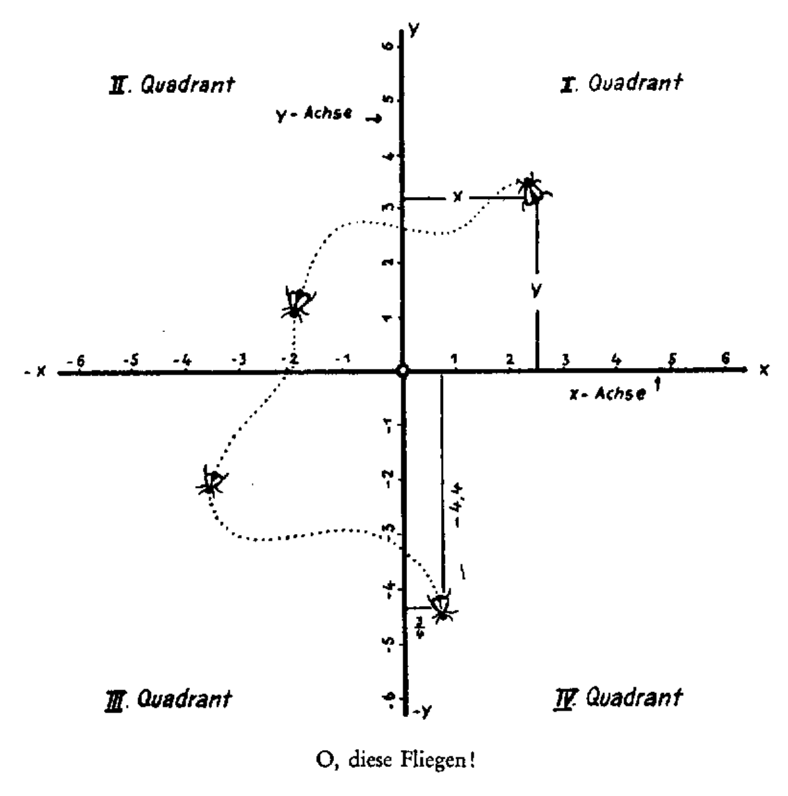
Nun denken wir einen Augenblick nach. Die ganze Koordinatengeschichte muss uns nämlich nach dem, was wir schon wissen, einigermaßen bekannt vorkommen. Denn sozusagen die „Hälfte“ unseres Linienkreuzes hier kennen wir ja schon von unserem biederen Thermometer, der Zahlengeraden, her! Und tatsächlich: Denken wir uns zwei Thermometerskalen rechtwinklig übereinandergelegt, so dass die beiden einander überdeckenden Nullpunkte den Koordinatenursprungspunkt ergeben, so sind wir auf diese noch anschaulichere Weise wieder zu einem Koordinatensystem gekommen. Die Sache sieht auf den ersten Blick gesucht, ja vielleicht ins Kindische vereinfacht aus. Aber unsere „Thermometerkreuzung“ als Koordinatensystem klärt mit einem Schlage etwas auf, was sonst dem Lernenden bitterböse Schwierigkeiten bereitet und zumeist nur durch mechanisches Büffeln dem Gehirn einverleibt, aber nicht verdaut wird: nämlich die Richtungen, nach denen hin Plus und Minus gezählt werden. Ein Blick auf unsere Thermometerkreuzung aber erklärt mehr als seitenlange Auseinandersetzungen, wie die Sache eigentlich zu verstehen ist.



Ebenes, zweiachsiges Koordinatensystem aus zwei Thermometerskalen entstanden gedacht

Wir betrachten zunächst den ersten Quadranten und stellen fest:

Sowohl auf der waagerechten x-Achse als auf der senkrechten y-Achse sind hier nur positive Zahlen aufmarschiert, Im zweiten Quadranten — wir rechnen und zählen im umgekehrten Sinn wie auf der Uhr — ist das Zahlenpack auf der senkrechten y-Achse noch positiv, die Zahlen auf der x-Achse jedoch sind negativ. Im dritten Quadranten ist alles „unter Null“, d. h. negativ. Im vierten dreht sich die Sache wieder zurück: Jetzt ist die x-Achse positiv und die



O, diese Fliegen!

y-Achse negativ. Bitte, lieber Leser, zeichne dir die Sache einmal auf und schreibe alles dazu! Hier Klarheit zu haben, ist ungeheuer wichtig. Denn auf Schritt und Tritt brauchen wir im folgenden das Koordinatensystem und seine so einfachen Geheimnisse! Und studiere das Bild der kriechenden Fliege!

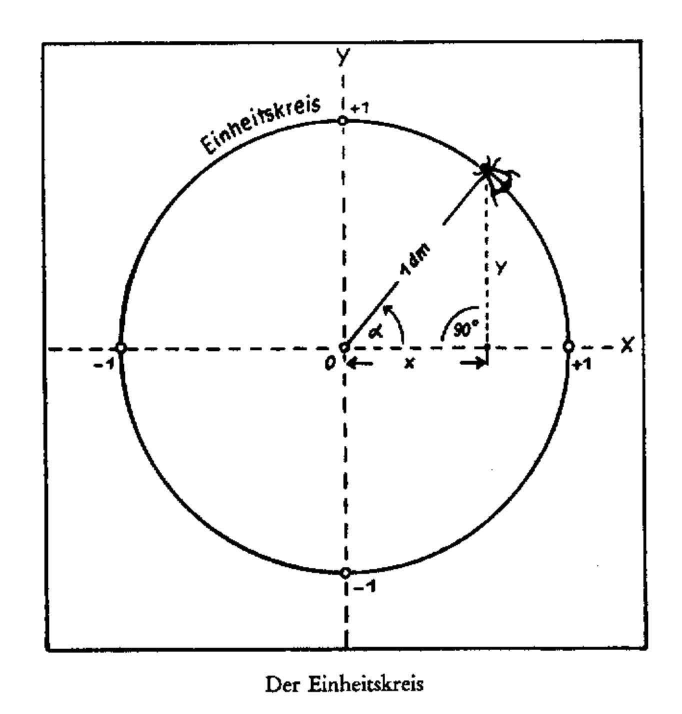
Wir haben uns ein richtiges Koordinatensystem aus den einander kreuzenden und mit Zahleneinteilungen versehenen Achsen aufgezeichnet. Da kommt eine freche Fliege und krabbelt auf unserer mathematischen Zeichnung herum. Und zwar setzt sie sich im ersten Quadranten auf einem Punkt nieder, der ein x von etwa + 2,5 und ein y von + 3,3 hat. Dann kriecht sie in der Richtung zur y-Achse hin, die sie bei einem y von + 2,6 überschreitet. In unregelmäßigem Linienzug krabbelt sie dann im zweiten Quadranten weiter, überschreitet die x-Achse bei einem Werte von – 2,1, kommt in den dritten Quadranten, den sie, die y-Achse bei – 3,2 überschreitend, verlässt. Im vierten Quadranten endlich krabbelt sie bis zum Punkte mit den Koordinaten von $x = +\frac{3}{4}$ und einem $y = -4{,}4$. Dort hat das Biest von Mathematik anscheinend genug und fliegt davon. Uns aber hat die listige Fliege mit ihrem Spaziergang in einfachster Weise die Lagenangabe von Punkten in dem gezeichneten Koordinatensystem gezeigt.

Jetzt erst sind wir endlich so weit, dass wir die stachlige Geschichte mit den Winkeln im Dreieck behandeln können. Wozu wir übrigens nur einen Teil der gewonnenen Weisheit brauchen.

Wir kreuzen in der Mitte eines frisch aufgezogenen Papiers auf unserem Reißbrett einen Punkt an. Hast du ihn schon, lieber Leser? Gut! Nimm einen Zirkel und stelle seine „Beine“ mit Hilfe eines Maßstabes bis auf 10 cm auseinander. Nun stich die Zirkelspitze in den gewählten Punkt und ziehe einen Kreis. Was wir gemacht haben ist klar. Wir haben einen Kreis gezeichnet, dessen Radius 10 cm, also eine **Einheit**, sagen wir also besser einen **Dezimeter** groß ist. Es läge auch gar nichts daran, den Kreisradius einen Zentimeter, einen Zoll, eine Elle oder einen Meter lang zu machen. Auf die absolute Größe kommt es nicht an; wichtig ist nur, dass der Kreisradius der Einheit des benutzten Maßsystems entspricht. Dafür ist der Dezimeter eben am bequemsten. Wir nennen diesen Kreis den **Einheitskreis**.

Jetzt zu unserer Untersuchung. Wir beginnen sie damit, dass wir durch den Mittelpunkt des Kreises, eine Waagerechte und eine Senkrechte ziehen, eine x-Achse und eine y-Achse also. Der Ursprung „0“ des so gezeichneten Koordinatensystems ist also gleichzeitig der Mittelpunkt des Einheitskreises. So! Und nun kommt unsere „mathematisch orientierte“ Fliege wieder und krabbelt munter auf der Kreislinie herum. Die Fliege klettert von der waagerechten x-Achse in die Höhe. Dabei ist ihr Abstand von der senkrechten y-Achse zunächst gleich der Einheit 1 (genauer 1 dm); doch, je höher sie krabbelt, je mehr nähert sie sich der y-Achse. Hat sie den höchsten Punkt erreicht, dann ist dieser Abstand natürlich Null. Für jeden Punkt auf der Kreislinie — also dem jeweiligen „Standort“ der Fliege — läßt sich wieder ein x und ein y angeben. Diese bilden zusammen mit dem Radius ein rechtwinkliges Dreieck.

So entstehen unendlich viele Dreiecke nacheinander, die alle zweierlei gemeinsam haben: Die längsten Seiten sind immer gleich. Und bei jedem Dreieck ist ein Winkel ein rechter, das heißt, er hat gerade 90 Grad; jedes y steht ja wie die y-Achse selbst, senkrecht auf der waagerechten x-Achse. Dagegen ändern sich die beiden kleineren Seiten und die anderen beiden Winkel der Dreiecke laufend.



Der Einheitskreis

Uns interessiert an den Dreiecken vorläufig nur die waagerecht auf der x-Achse liegende Seite. Von ihr wissen wir schon einiges. Nämlich dass sie bei einem Winkel am Drehpunkt — dieser ist für uns ausschlaggebend — von 0 Grad genau so groß ist wie der Radius des Einheitskreises, also 1, und dass sie schließlich bei 90 Grad 0 wird.

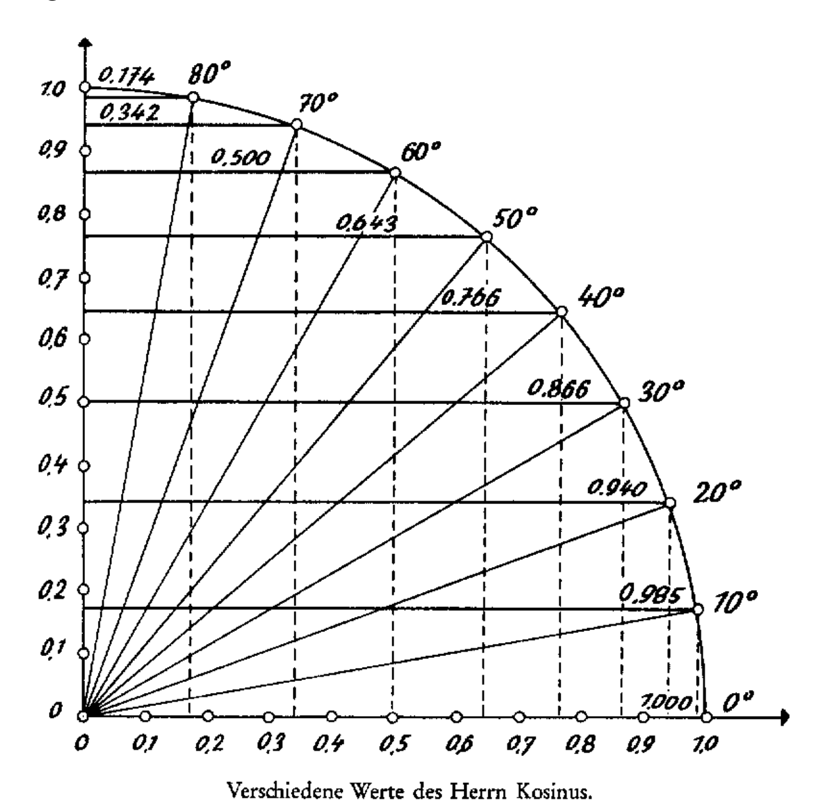
Die **Länge** der erwähnten **waagerechten Dreieckseite** hat für jeden Winkel einen ganz bestimmten Wert. Er wird der **Kosinus** des Winkels genannt.

Die Sache ist doch klar! Denn damit haben wir eigentlich schon das Schwierigste erfaßt, stehen mitten drin in dem so gefürchteten Gebiet der Trigonometrie. Und an unserem biederen Einheitskreis können wir alles über den Kosinus ablesen. — Der Einheitskreis ist sozusagen die „Wohnung des Herrn Kosinus“. Wenn wir Schwierigkeiten haben, dann suchen wir „ihn“ am besten in seiner Wohnung auf.

Einige der erwähnten Dreiecke sind in der nachstehenden Abbildung eingezeichnet. Der Kosinuswert für den Winkel 10° ist z. B. 0,984 807 753.

Für den Winkel 60° ist er genau $0{,}5 = \frac{1}{2}$.

Was ist nun dieser Kosinus? Merken wir uns: eine **reine**, sogenannte **„dimensionslose“** Zahl[1)], die 1 beträgt, wenn der Winkel 0 ist, mit zunehmendem Winkel abnimmt, bis sie 0



Verschiedene Werte des Herrn Kosinus.

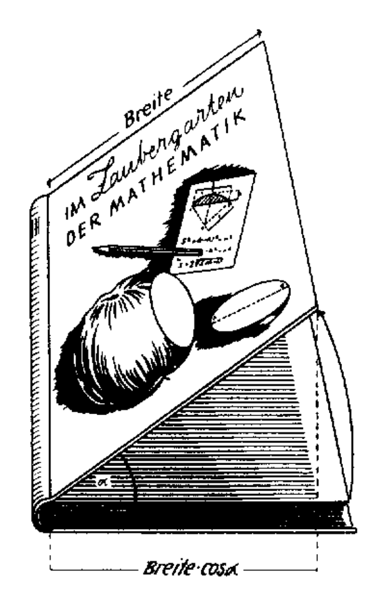
Wie man deutlich sieht, ist der cos von 0 Grad gleich 1, von 10 Grad gleich 0,985 ...; dann wird er immer kleiner und ist endlich bei 90 Grad gleich Null

1) Wie etwa 3, $\frac{1}{4}$, 10; zum Unterschied von etwa 15cm, 18 l, 36 t.

wird, ein Wert, den sie bei einem Winkel von 90 Grad erreicht.

Nun noch ein Beispiel für das leichtere Verständnis der Kosinusgröße:

Wir nehmen ein Buch, dessen steifer Deckel genau so breit sein soll wie die Seiten. Das Buch legen wir geschlossen unter eine möglichst hoch angebrachte Lampe. Klappen wir nun den Buchdeckel ganz langsam auf, so zeigt die Breite des Schattens den Kosinuswert des jeweils eingehaltenen Winkels zwischen Deckel und oberster Buchseite an. Ganz exakt genau ist dieses Beispiel freilich nur dann, wenn das Licht der Lampe genau senkrecht auf das Buch fällt.



Herr Kosinus
an einem aufgeklappten Buch

So anschaulich dieses Beispiel auch ist, so kommt aber jetzt eine kleine Schwierigkeit hinzu. Das Buch hat eigentlich nichts mehr mit dem Einheitskreis zu tun, es hat doch z.B. eine ganz reale Breite. — Nun wird dem Leser aber schon aufgefallen sein, dass es mit dem Radius 1 nicht so schlimm ist. Wie lang wir diesen Radius machen, ist willkürlich; die Kosinuswerte kommen immer als Teile von 1 heraus:

$$\cos 0° = 1$$

$$\cos 30° = 0{,}866\,025\,403$$

$$\cos 60° = 0{,}5$$

$$\cos 90° = 0.$$

Auf die Längen kommt es also im Einheitskreis gar nicht an, es handelt sich um ein dimensionsloses mathematisches Gebilde. — Doch lassen wir uns nicht verwirren, stellen wir nur fest, wie scharf die Formulierungen, die wir in der Mathematik verwenden, auseinander zu halten sind.

Woher nimmt man den genauen Wert des Kosinus, wenn man ihn braucht? Nun, mit Hilfe des Taschenrechners ist das ganz einfach.

Wollen wir nun die Beziehungen des Herrn Kosinus zu den rechtwinkligen Dreiecken genauer untersuchen, dann müssen wir die Längen wieder in unsere Betrachtungen mit einschließen. Beginnen wir mit dem Ausmessen der „Wohnung“ des Herrn Kosinus, also mit dem Einheitskreis. Damit wir schön in Übereinstimmung zu unseren bisherigen Überlegungen bleiben, wählen wir als Längeneinheit für unsere Messungen die Länge des Radius. Damit ergibt sich die einfache Definition des Kosinus:

Ist bei einem rechtwinkligen Dreieck die längste Seite — die Hypotenuse, — gleich der Längeneinheit, so entspricht die Länge der anliegenden Seite dem Kosinuswert des eingeschlossenen Winkels.

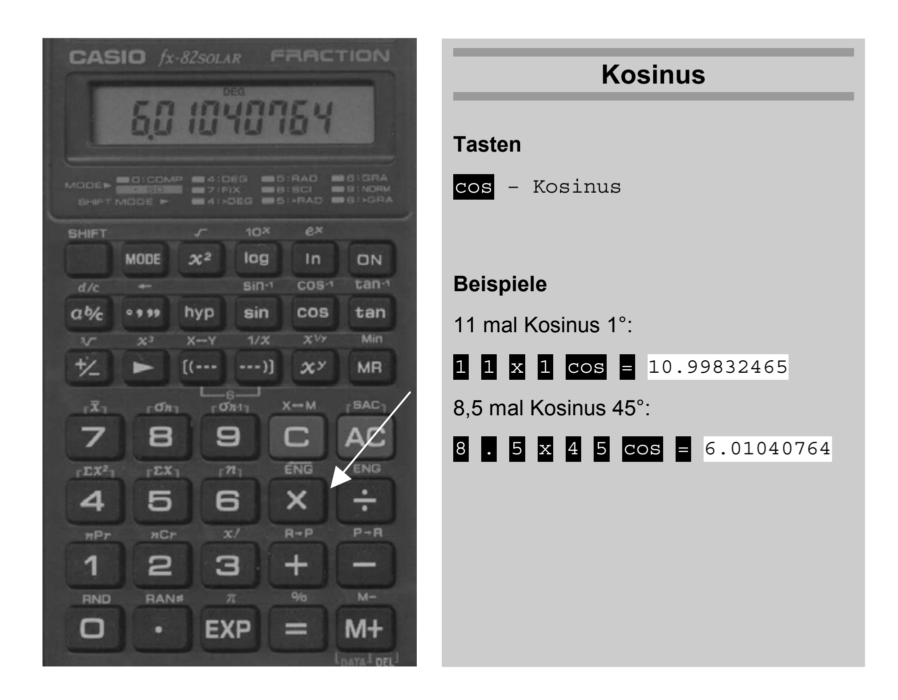
Hat die Hypotenuse z. B. die Länge 1 dm und schließt sie mit der anliegenden Seite den Winkel 60° ein, dann ist die Länge der anliegenden Seite gleich $\cos 60° \cdot 1\ \text{dm} = 0{,}5 \cdot 1\ \text{dm} = 0{,}5\ \text{dm}$. Natürlich kann uns nichts davon abhalten, für 1 dm z.B. 10 cm zuschreiben. Die Hypotenuse hat dann eben die Länge 10 cm und die anliegende Seite ist $\cos 60° \cdot 10\ \text{cm} = 5$ cm lang. An diesem Prinzip ändert sich auch nichts, wenn wir den Schritt zu einem

rechtwinkligen Dreieck mit beliebiger Seitenlänge tun. Wir brauchen lediglich „Längeneinheit“ durch „Länge der Hypotenuse“ zu ersetzen. Hierzu gleich eine Aufgabe:

Eine geradlinige Straße von 11 km hat eine Steigung von 1 Grad. Wie weit ist nun ein Kraftfahrzeug tatsächlich vom Anfangspunkt der Strecke gerechnet entfernt, wenn es die Strecke zurückgelegt hat? — Auch jetzt kann die Antwort nicht schwer fallen. Sie muss lauten: 11 km mal Kosinus von 1 Grad, und das ist gleich 11 · 0,999 847 695 gleich 10,998 324 65 km.

Ebenso leicht errechenbar ist eine andere Aufgabe:

Unter einer möglichst hoch aufgehängten Lichtquelle liegt ein 8,5 cm breites Buch. Wie breit ist der Schatten des Buchdeckels, wenn dieser 45 Grad geöffnet wird? Wieder haben wir: Buchdeckelbreite mal Kosinus von 45 Grad gleich 8,5 cm mal 0,707 106 781 = 6,010 407 64 cm.



Fassen wir den Sachverhalt noch einmal kurz zusammen:

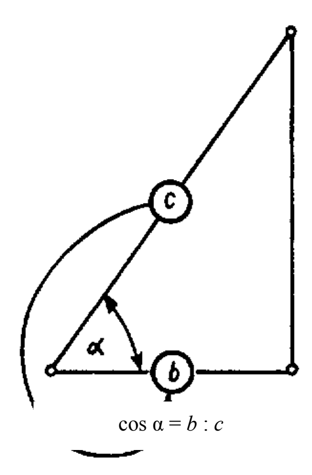
Hypotenuse mal Kosinus = anliegende Seite.

Übrigens hat man für „Kosinus des Winkels“ auch eine Abkürzung, man schreibt dafür einfach „**cos**“. Bezeichnen wir den Winkel; den die Hypotenuse und die anliegende Seite einschließen mit α (sprich: Alfa) und die Seiten des Dreiecks mit kleinen Buchstaben, und zwar die Hypotenuse mit c und die beiden kürzeren mit a und b, so können wir dafür auch schreiben: $c \cdot \cos \alpha = b$.

Und daraus ergibt sich: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Oder in der Alltagssprache:

Der Kosinus ist das Verhältnis (der Quotient) zwischen der anliegenden Seite und der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck.



$\cos \alpha = b : c$

So, lieber Leser, nun sieh dich um, schau dir die verschiedensten Dinge deiner Umwelt an, wo du ein rechtwinkliges Dreieck findest, versuche, den Kosinus zu „erblicken“.

Merke dir aber:

1. Im allgemeinen ist der Kosinus immer ein Quotient, das Ergebnis einer Division. Anliegende Seite durch Hypotenuse!

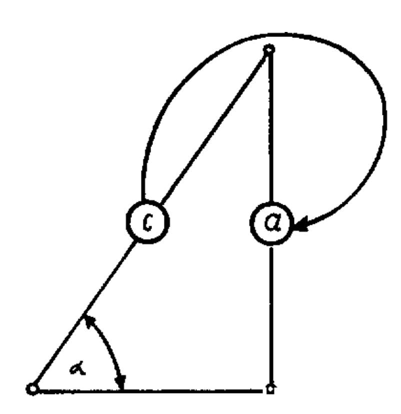
2. Nur wenn die Hypotenuse 1 ist, entspricht der Kosinuswert folgerichtig der Länge der anliegenden Seite selbst.

Alles in allem: Es ist scheinbar nicht sehr aufregend, was wir bisher von unserem Herrn Kosinus erfahren haben. Er spielt zwar in jedem rechtwinkligen Dreieck seine Rolle, aber er ist eigentlich ein ganz unbedeutender Bursche, der es von Null bis allerhöchstens auf Eins bringen kann.

Bevor wir an einigen Beispielen erläutern wollen, welche Bedeutung unser neuer Bekannter jedoch in Wahrheit hat, wollen wir noch kurz den Bruder des Herrn Kosinus kennen lernen, Herrn **Sinus**. Geschwister pflegen einander ähnlich zu sein. Das trifft eigentlich auch hier zu. Dennoch ist in mancher Hinsicht Herr Sinus das krasse Gegenteil des uns schon bekannten Kosinus. Übrigens ist auch Herr Sinus im Einheitskreis zu Hause. Wir untersuchen daher am besten erst wieder die bewussten rechtwinkligen Dreiecke. Um die anliegenden Seiten brauchen wir uns dabei nicht mehr zu kümmern; Herr Sinus hat nicht das geringste Interesse an ihnen.

Was wir beabsichtigen, ist klar: Wir verfolgen das Wachstum der anderen Dreieckseite bei verändertem Winkel. Und nach kurzem Hin und Her haben wir es erfasst: Diese Seite ist gleich Null, wenn der Winkel Null ist und sie wächst mit ihm, um schließlich bei 90 Grad einen Höchstwert, nämlich 1, zu erreichen. Zwischen diesen beiden Werten nimmt die Seitenlänge alle möglichen Zwischenwerte an — kurz, es ist das gleiche Spiel wie beim Kosinus, nur an der anderen Seite betrachtet und auf denselben Winkel α bezogen. Wir kommen in ganz entsprechender Weise zu den Sinuswerten des Winkels α — abgekürzt geschrieben „sin α“ —, die wir insbesondere auch am Einheitskreis ablesen können. Auch für den **Sinus** finden wir alle Werte in den schon mehrfach erwähnten Logarithmentafeln. Verfolgt man diese Zahlen genauer, so stellt sich bald eine Überraschung heraus: Sinus und Kosinus laufen in eigenartiger Weise einander gleichsam entgegen. Sinus von 0° (sprich „null Grad“) ist 0, Kosinus von 0° ist 1. Dafür ist Sinus von 90° gleich 1 und Kosinus von 90° gleich 0. Also gerade umgekehrt. Daraus vermuten wir, dass „Mittenwegs“, bei einer Winkelgröße von 45°, beide gleich groß sind. Das sind sie auch. Denn sowohl Sinus wie Kosinus von 45° sind 0,7071 (was im Grunde nichts anderes bedeutet als $\frac{1}{2}\sqrt{2}$!).

Der Sinus von 30° ist $\frac{1}{2}$, der Kosinus von 60° ist wieder $\frac{1}{2}$. Genauso ist zum Beispiel sin 8° = cos (90° – 8°) = cos 82°, ferner ist der Sinus von 49 Grad gleich dem Kosinus von 41 Grad und so fort.



An Hand des schon hinlänglich beim Kosinus Festgestellten fällt es uns jetzt nicht schwer, zu sagen, was der Sinus ist, nämlich:

1. Im Allgemeinen ist der Sinus immer ein Quotient, das Ergebnis einer Division, und zwar gegenüberliegende Seite durch Hypotenuse!

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

2. Nur wenn die Hypotenuse 1 ist, entspricht der Sinuswert folgerichtig der Länge der dem Winkel gegenüberliegenden Seite selbst. Wobei wir natürlich nicht vergessen dürfen, dass dies nur im rechtwinkligen Dreieck gilt.

Mit dieser Bekanntschaft wollen wir uns vorläufig begnügen. Es sind zwar insgesamt vier derartige Geschwister da: **Sinus** und **Kosinus**, **Tangens** und **Kotangens**, von denen wir später noch mehr erfahren werden. Jetzt sehen wir einmal nach, was diese beiden Burschen Sinus und Kosinus eigentlich alles in der Welt vermögen. Es ist unheimlich viel!

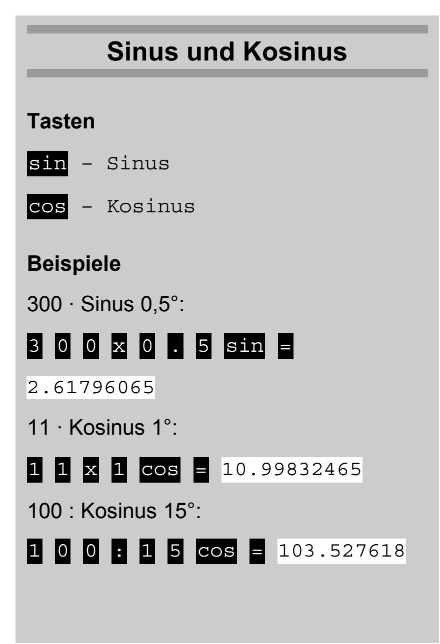
Da fährt zum Beispiel ein Eisenbahnzug durch die Gegend. Die Strecke ist gerade und genau waagerecht angelegt. Da können die beiden Brüder Sinus und Kosinus nicht viel ausrichten. Denn waagerecht bedeutet, dass der Steigungswinkel der Strecke Null ist, und da ist Herr Kosinus gleich 1 und Herr Sinus 0. Und wenn der Zug stehen bleibt, so bleibt er einfach dort stehen, wohin ihn die Leistung der Lokomotive und die im Zuggewicht aufgespeicherte Energie gebracht haben. Aber jetzt kommt eine Steigung. Nehmen wir an, es geht in einem Winkel von $\frac{1}{2}$ Grad bergauf. Sogleich greift da unser Brüderpaar ein. Einen tollen Spuk leistet sich Herr Kosinus. Denn er „erleichtert“ jetzt den Zug. Während der Fahrt auf der Ebene lastet ja das ganze Zuggewicht — angenommen 300 t — auf den Rädern. Hier auf der Steigung jedoch nicht mehr, denn jetzt beträgt das auf den Rädern ruhende Gewicht nur mehr $300\text{ t} \cdot \cos\frac{1}{2}^{\circ}$. Das ergibt 300 · 0,999 96 923 = 299,988 5769 t[1]. Um 11,423 081 kg — das ist nicht viel! — wird der ganze Zug leichter, das heißt, er drückt um rund 11,5 kg weniger mit den Rädern auf die Schienen. Natürlich kann dieses Gewicht nicht irgendwohin verschwinden. Herr Kosinus schiebt es gewissermaßen seinem Bruder Sinus zu. Das bewirkt, dass sich nun der Zug von 300 t mit einem Teil seines Gewichtes wirklich und tatsächlich an den Zughaken der Lokomotive „hängt“, und zwar beträgt dieses Gewicht $300\text{ t} \cdot \sin\frac{1}{2}^{\circ}$, also 300 · 0,008 726 535 t, was ausgerechnet 2617,960 65 kg ergibt. Der Lokomotivführer muss

[1] $\cos\frac{1}{2}^{\circ}$ unterscheidet sich von 1 nur sehr wenig, so dass wir schon 7 Stellen hinter dem Komma berücksichtigen müssen.

mehr Dampf geben, um die zäh zurückhaltende Kraft von mehr als zweieinhalbtausend Kilogramm, die Kraft des zu Tal ziehenden „Steigungswinkels“ (Sinus) zu überwinden. Und wenn jetzt der Zug stehen bleibt, müssen sofort die Bremsen gezogen werden, denn sonst zerrt Herr Sinus den Zug unerbittlich die Steigung hinab. Man kann sich vorstellen, was dieses vertrackte Doppelspiel der beiden Brüder allen Bahnen der Welt, allen Kraftfahrern, Radlern und Fußgängern an Geld und Arbeit kostet: Arbeit durch notwendig werdende Mehrarbeitsleistung beim Bergfahren, Geld durch Materialverbrauch in den Bremsen bei der Talfahrt und so fort. Und unerbittliche Tyrannen sind die beiden: nicht die geringste „Befreiung“, nicht die geringste Ausnahme von ihrem harten Tribut kennen sie. Und dem Leser wird schon ein Schimmer der Rolle aufdämmern, die unsere neuen Bekannten aus der als so nüchtern und fad verschrienen Geometrie spielen!

Aber zurück zu unserem Herrn Kosinus! Dass er wirklich so gut wie überall seine Hand im Spiel hat, dafür noch ein Beispiel, das sicher viele überraschen wird, die bereits glückliche Grundbesitzer sind oder auch erst von einem bescheidenen Gärtchen als Sehnsuchtsziel träumen. Da haben wir zum Beispiel zwei Grundstücke zwecks Ankauf in die engere Wahl gezogen. Angenommen, beide hätten gleiche Breite und gleiche Länge, sagen wir etwa 100 m Länge. Eines aber liegt in der Ebene, das andere an einem ziemlich steilen Südhang. Wir fragen nun: Bei welchem Stück sind wir besser daran? Wieder entscheidet das endgültig und eindeutig Herr Kosinus. Nämlich so: Bei dem ebenen Erdfleck ist, da keine Steigung und kein Steigungswinkel vorhanden ist, Herr Kosinus gleich 1; mit anderen Worten, er hat nichts zu „melden“, da „nach Adam Riese“ jede Zahl mit 1 multipliziert oder dividiert nur wieder sich selbst ergibt. Anders ist es bei dem Südhangstück. Das läge in einem Steigungswinkel von angenommen 15 Grad. Sofort greift hier unabwendbar Herr Kosinus ein, der für den genannten Winkel einen Wert von 0,965 925 826 aufweist. Merkwürdiges treibt er! Zunächst einmal „**hilft**“ er uns beim Ankauf ganz erheblich. Da nämlich in keinem Grundbuch, in keinem Kataster die wirkliche Länge einer Parzelle angeführt wird, sondern nur die auf die Waagerechte reduzierte sogenannte „projizierte“ Länge, so erhalten wir in Wirklichkeit **ein viel größeres Grundstück**! Wenn wir 100 m kaufen und bezahlen, bewirkt Herr Kosinus, dass wir 100 durch 0,965 925 826, also tatsächlich 103,527 618 m, entlang der Grundfläche gemessen, erhalten!




Sinus und Kosinus

Tasten

sin – Sinus

cos – Kosinus

Beispiele

300 · Sinus 0,5°:

3 0 0 x 0 . 5 sin =

2.61796065

11 · Kosinus 1°:

1 1 x 1 cos = 10.99832465

100 : Kosinus 15°:

1 0 0 : 1 5 cos = 103.527618

Außerdem: Es ist auch niemand anders als Herr Kosinus, welcher der **Sonne** an diesem Südhang **verstärkte** Kraft gibt. Wir sind also dank seiner Hilfe unbedingt besser dran, wenn wir das Stück am Südhang kaufen und nicht das in der Ebene oder gar eines an einem Nordhang, wo uns zwar Freund Kosinus auch die Länge streckt, aber unbarmherzig wieder die Sonne „**schwächt**“. Wir kaufen also! Aber schon verlangt nun der unerbittliche Herr Kosinus seinen Tribut: Sowie wir auf unserem geneigten Grundstück gehen, fahren oder eine Last tragen — schwups, ist er wieder da, erleichtert erst heimtückisch unsere Last, aber läßt uns mit Hilfe seines überall lauernden Bruders Sinus doppelte und dreifache Arbeit bergan leisten, um uns dafür in die Kniekehlen zu stoßen, wenn es bergab geht.

Geradezu erschaudern müssen wir vor der Allgewalt unseres neuen geometrischen Bekannten, wenn wir uns seine Rolle im Weltgeschehen vorstellen und seine grimmig-unbarmherzige Faust erkennen, mit der er die ganze Erde im Bann hält. Wer ist es, der die Wüste Sahara mit todbringender Sonnenglut durchröstet, endlose Hitze in die dumpfig-heißen Regenwälder der Tropen zaubert, mildere Kühle den gemäßigten Zonen verschafft und die Polgebiete der Erde in ewige Eispanzer und Schneewüsten gehüllt hat? Wer ist es, der uns die hochsommerliche Hitze, den Zauber des Frühlings bringt, das abklingend schöne Sterben des Herbstes, Frost und Eisschauer des Winters? — Niemand anders als Herr Kosinus! Die Sache ist wieder ebenso einfach wie grundlegend und unabänderlich: Wir halten ein Blatt weißen Papiers in die Sonne. Es ist ohne weiteres klar, dass es am stärksten und hellsten erleuchtet ist, das heißt am kräftigsten bestrahlt wird, wenn die Sonnenstrahlen senkrecht auf die Ebene auffallen, wenn also der Winkel zwischen den Sonnenstrahlen und der auf dem Papierblatt errichtet gedachten Senkrechten 0 Grad aufweist. Sobald wir aber das Blatt drehen, wird es immer schwächer und schwächer erhellt und kann, wenn wir es genau in die Richtung der Sonnenstrahlen halten, von diesen streng genommen nicht mehr getroffen werden, sondern es wird nur mehr gestreift; dass es nicht ganz „lichtlos“ wird, verursacht das von anderen Gegenständen der Umgebung und dem Himmel zurückgestrahlte Licht. Wir erraten es schon: Wieder hat da Herr Kosinus seine Hand im Spiel. Einmal lässt er ungehindert die Sonnenstrahlen wirken, in allen anderen Fällen aber verringert er infolge seines abnehmenden Wertes die Wirkung und bringt sie schließlich ganz zum Verschwinden. Und genau so wie mit unserem Papierblatt verfährt der „unbarmherzige“ Kosinus mit der ganzen Erdkugel. „Eins“ ist er in den Tropen, weil dort die Sonne fast immer durch den Zenith geht; also lässt Herr Kosinus ungehindert die ganze Sonnenkraft niedersengen. Kleiner ist er schon bei uns, und zwar wegen des tieferen Sonnenstandes. Wo aber Frau Sonne sich nur sehr wenig über den Horizont erheben kann, also in den Polargebieten, wird Herr Kosinus noch viel kleiner, so dass er dadurch die Sonnenwirkung derart abbremst, dass die eingestrahlte Sonnenwärme zu geringfügig wird, der Wärmeverlust an den Weltenraum nicht mehr ersetzt werden kann und grimmige Kälte Land und Meer in ewigen Eis- und Schneepanzer hüllt, ein Geschehen, das in dem Wechsel unserer Jahreszeiten, die auch niemand anderes macht als Herr Kosinus, sein Widerspiel findet.

Und da soll noch jemand behaupten, die Trigonometrie, in der Herr Kosinus beheimatet ist, sei nüchterne Zahlenreiterei! Man wird lange suchen müssen, um einen romantischeren, eigenartigeren Gewalthaber und so rücksichtslosen Gebieter kennen zu lernen wie Herrn Kosinus, der es aber trotz alledem höchstens bis auf 1 bringen kann.

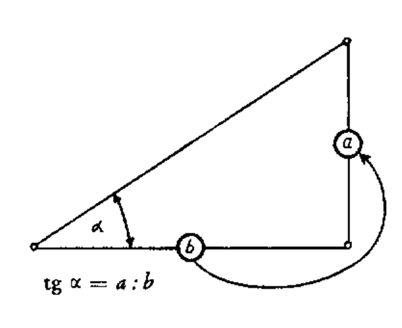
Nach diesen Überraschungen, die uns ein näheres Kennenlernen des Brüderpaares Sinus und Kosinus bereitet hat, dürfen wir uns aber noch keineswegs auf unseren „trigonometrischen Lorbeeren“ ausruhen.

Von den übrigen Brüdern dieser beiden müssen wir unbedingt noch den für das Verständnis der höheren Mathematik so hochbedeutsamen „**Tangens**“ kennen lernen. Die Sache ist wieder sehr einfach:

Wir wissen ja schon, die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks stehen in einem festen Abhängigkeitsverhältnis zu dem Winkel α — natürlich ganz entsprechend auch zu dem Winkel β; doch das interessiert uns jetzt weniger —, und zwar ist $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

In der Mathematik spricht man nun nicht von „Abhängigkeit“, sondern man hat dafür den Begriff „**Funktion**“ geprägt. Ein „Etwas“ ist abhängig von einem anderen „Etwas“, das Ganze nennt man eine „**Funktion**“. — Das klingt alles sehr einfach, doch kann die ganze Sache verteufelten Ärger bereiten, wenn es darum geht, komplizierte Funktionen zu untersuchen. Hier fängt die Mathematik eigentlich erst an; in ihrem Hauptteil hat sie sich mit derartigen Untersuchungen (Analyse; daher auch „Analysis“) zu beschäftigen. — Doch keine Angst! — Es ist hier etwa wie im Wirtschaftsleben: Kaufmann Meyer hat Schulden bei seinem Lieferanten. Die Angelegenheit „funktioniert“ ganz gut; seinen Einnahmen entsprechend tilgt er gewissenhaft seine Schulden. Allzu große Sorgen hat er dabei nicht, er versteht sein Geschäft! — Etwas anders sieht das aus mit den „Verbindlichkeiten“ eines großen Industriebetriebes; hier ist schon ein tüchtiger Finanzexperte erforderlich, der alles überblicken kann, — Mit diesen anschaulichen Beispielen von „Funktionen“ mögen gleichzeitig die Grenzen unseres Ehrgeizes abgesteckt sein.

Doch, zurück zu unseren Winkelfunktionen!



Herr Kosinus ist verantwortlich für das Seitenverhältnis Ankathete (wie man die anliegende Seite nennt) zu Hypotenuse, während sich Herr Sinus um das Verhältnis Gegenkathete zu Hypotenuse kümmert. Damit wird aber auch ersichtlich, dass das Verhältnis **Gegenkathete** zu **Ankathete** ebenfalls vom Winkel α abhängt, d. h. eine Winkelfunktion ist. Man nennt sie „**Tangens**“ (mit der Abkürzung „tg“).

Also $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$.

Die verwandtschaftlichen Beziehungen sind schnell aufgezeigt.

Wegen $a = c \cdot \sin\alpha$ und $b = c \cdot \cos\alpha$ ist ganz einfach $\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{c \cdot \sin\alpha}{c \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

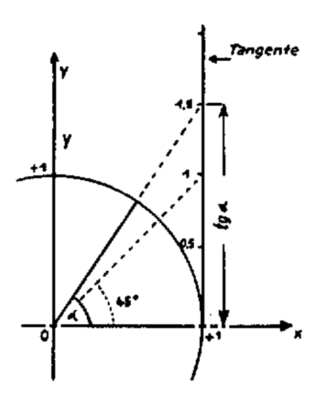
Damit können wir aber bereits einige Merkwürdigkeiten dieser neuen Funktion erkennen. Ist z.B. α = 0°, dann ist tg 0° = 0 (sin 0° : cos 0° = 0 : 1 = 0!). Wenn sin α = cos α ist, d.h. also α = 45°, so wird der Tangens gleich eins. — Und jetzt beginnt es interessant zu werden, denn dieser Bursche schlägt ja ganz aus der Art, er geht einfach über Eins hinaus. So ist tg 60° = 1,732 050 808 (das ist gerade so viel wie $\sqrt{3}$).Aber Herr Tangens treibt es immer noch toller. Der Tangens von 80° ist bereits schon 5,671 281 82, bei 85° klettert er auf 11,430 052 3 und ist bei 89° auf 57,289 961 63 gelandet. Von 89° bis 90° überschlägt er sich förmlich! — Je näher er an 90° herankommt, um so mehr entrückt er über alle noch von uns erkennbaren Grenzen. Auch mit unserer Formel können wir ihn nicht mehr erfassen:

$$\text{tg}90° = \frac{\sin 90°}{\cos 90°} = \frac{1}{2}$$

Das ergibt einen völligen Unsinn, denn durch die Null dürfen und können wir einfach nicht dividieren. Daran ändert auch nichts, dass man sagt, der Tangens des Winkels 90° ist eben „unendlich“.

Was ist dieses „unendlich“?

Wie es aussieht, weiß kein Mensch. Man kann noch nicht einmal sagen, dass es eine Zahl ist. Wir wollen uns daher merken, für den Winkel 90° lässt sich kein Tangenswert definieren. Die vielfach auftauchende, nicht ganz glückliche Bezeichnung tg 90° = ∞ (sprich „gleich unendlich“) hat daher nicht mehr als symbolhaften Charakter.



Der Tangens am Einheitskreis

Doch zurück zu unserem Einheitskreis! Auch die Tangenswerte lassen sich am Einheitskreis ermitteln. Wir wollen den Leser aber nicht mehr mit langatmigen Erklärungen langweilen. Was darüber gesagt werden muss, ist aus der nebenstehenden Abbildung zu ersehen. Wichtig ist dabei, dass man die Tangenswerte an der Tangente am Einheitskreis abliest. Daher hat der Tangens übrigens seinen Namen.

Wir dürfen uns also nicht wundern, dass immer dann, wenn von Tangenten die Rede ist, auch meistens der Tangens mit im Spiel ist.

Die Bedeutung des Herrn Tangens ist mindestens ebenso beachtlich, wie die seiner Geschwister. Dazu ein Beispiel: Die **Steigung** einer Eisenbahnstrecke ist so angelegt, dass sie sich auf je 1 km um 5 m hebt. Wie groß ist der Steigungswinkel α ? Sehr einfach: Der Tangens des gesuchten Winkels wird eben gleich sein der gegenüberliegenden Seite, dividiert durch die anliegende, oder anders geschrieben:

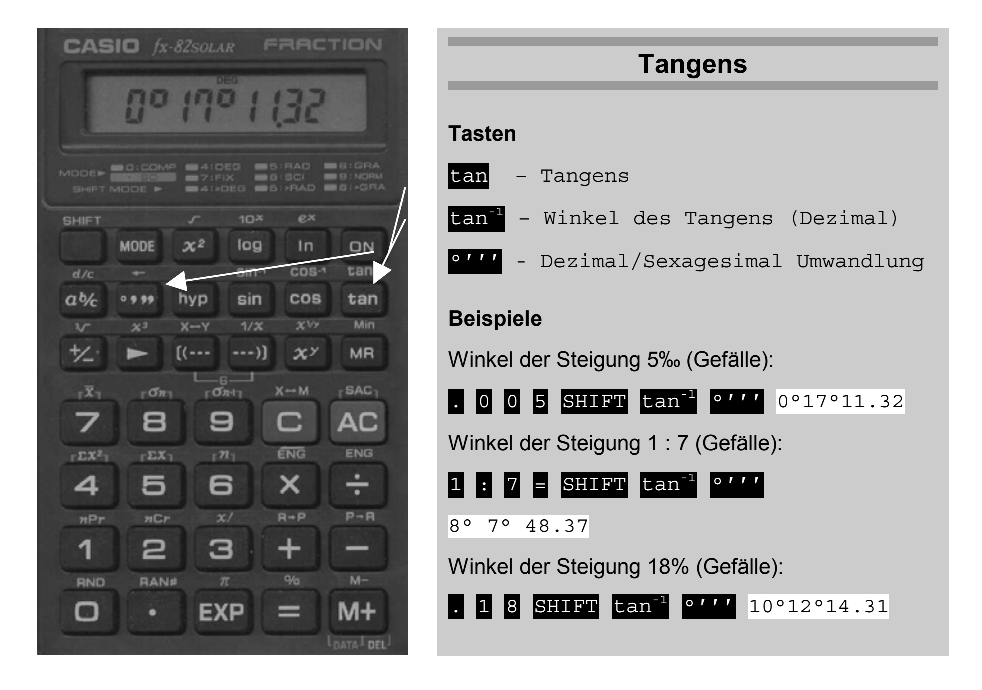
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{5\ m}{1\ km} = \frac{5}{1000} = 0{,}005\,.$$

Dafür kann man sagen: Die Steigung der Strecke beträgt 5‰ (sprich „Promille“).

Wenn ich den Winkel in Graden ausdrücken will, so muss ich mit dem Taschenrechner den Winkel berechnen, dessen tg gleich 0,005 ist. Diese Berechnung ergibt 0 Grad, 17 Minuten und 11,32 Sekunden.

Daraus ergibt sich für uns die sehr wichtige Tatsache, dass wir die Steigungen, wie wir sie auch schreiben oder aussprechen, eigentlich immer durch den Tangens des Winkels ausdrücken. Eine Steigung von 1 : 7 entspricht eben einem Steigungswinkel, dessen Tangens $\frac{1}{7}$ oder, in einem Dezimalbruch ausgedrückt, 0,142 857 142 ... beträgt. Ausgerechnet ergibt das einen dazugehörigen Winkel von 8 Grad, 7 Minuten und 48,37 Sekunden. Alles in allem: Wir haben in unserem Tangens einen alten, längst wohlbekannten Ausdruck aus dem täglichen Leben wiedergefunden.

Wie ungeheuer wichtig ein richtiges Verstehen gerade dieser Größe ist, werden wir später noch sehen.



Herr Tangens will natürlich hinter dem Sinus-Kosinus-Bruderpaar nicht zurückstehen. Also hat auch er einen Bruder, mit dem er **noch näher** verwandt ist als das Sinus-Kosinus-Paar miteinander. Dieser Bruder hat den Namen **Kotangens** (Abkürzung: „ctg“.) Er gibt die Abhängigkeit des Winkels α von dem Seitenverhältnis **Ankathete** zu **Gegenkathete** an. Betrachten wir die beiden Brüder, dann stellen wir fest, dass sie fast Zwillinge sein könnten.

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \text{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Daraus erkennen wir unmittelbar die verwandtschaftliche Beziehung:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{ctg\ \alpha} \quad \text{oder} \quad \text{ctg}\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

Der eine ist der „**reziproke**“ Wert, der Kehrwert, des anderen!

Dividiert man 1 durch den Tangens, so bekommt man den Kotangens desselben Winkels und umgekehrt.

Hier haben wir nur noch ein klein wenig nachzutragen, um Gespenster zu bannen, die ängstliche Leser erschrecken könnten.

Wie wir schon sahen, sind die Winkelfunktionen einander sehr nahe verwandt.

Aus diesen Winkelverwandtschaften hat man nun zu praktischen Rechenzwecken — vorsichtig geschätzt! — etwa vier bis fünf Seiten anderer Formeln herausgetüftelt, die den Laien auf den ersten Blick entsetzlich erschrecken und ihm eine heillose Scheu vor aller Trigonometrie einjagen. Im Grunde genommen, ist es immer der gleiche „Schwindel“! Man dreht und wurstelt unser rechtwinkliges Dreieck so oder so herum, packt und zwackt es bald von dieser, bald von jener Seite und spielt einmal die, dann die andere Winkelfunktionsver-

wandtschaft aus. Es kann nicht Zweck dieses Buches sein, in diesen so stachlig aussehenden Busch weiter hineinzuführen. Wer allerdings hinein muss, mag sich trösten! Die so gefährlich aussehenden Dornen brechen von selbst ab, wenn man sich nicht verblüffen lässt.

Ein wichtiges Beispiel möge das unterstreichen:

Gehen wir mit dem „Pythagoras“ an das rechtwinklige Dreieck, so ist $a^2 + b^2 = c^2$ oder, wenn wir alles noch durch c^2 dividieren,

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 .$$ [1)]

Da stehen also gerade die Quadrate der Seitenverhältnisse, für welche die Herren Kosinus und Sinus verantwortlich sind. So dass also ganz einfach gilt:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$ [2)]

Nun noch einmal: Wer irgendwie mit der Trigonometrie Schwierigkeiten hat und vielleicht jetzt noch nicht alles klipp und klar sieht, für den gibt es immer noch eine Hilfe: „Zurück zum Einheitskreis!“ Es wäre schade, wenn heute, im Zeitalter des unaufhaltsamen Siegeszuges unserer Technik, einer der mitarbeiten will, sich in diesem wichtigen Gebiet der mächtigsten technischen Hilfswissenschaft nicht auskennt!

Wir fürchten fast, dass dem Leser von der ungewohnten geometrisch-mathematischen Welt, in die wir ihn eingeführt haben, schon ein wenig der Kopf rauchen wird. Wir wollen daher das viele, was noch zu sagen wäre, aber für die praktische Anwendung der Mathematik von geringerer Bedeutung ist, unter den Tisch fallen lassen. Es sei lediglich angedeutet, dass es auch noch merkwürdige Umkehrungen unserer biederen Winkelfunktionen gibt, die sogenannten zyklometrischen Funktionen, bei denen der **Winkelbogen** ins Gefecht kommt, dann die sogenannten hyperbolischen Funktionen, die man auf die Weise fand, dass man bei allen Überlegungen nicht vom Kreis, sondern von der eleganten Hyperbelkurve ausging. Das alles würde jedoch mehr abschrecken als belehren und in wirklich stachliges Vorstellungsgestrüpp führen.

Dafür verdient eine andere Frage, die hier nahe liegt, eine Antwort. Wie sieht es nämlich mit unseren biederen Winkeln in bezug auf jenes unheimlich fremde „Geisterreich,“ des Komplexes aus? Sind wir ihm hier nicht meilenweit fern? Denn wir haben ja nichts anderes als schlichte Handwerksarbeit geübt und uns friedlich in dem Einheitskreis getummelt, wie Schiller seine Wallensteinschen Soldaten höhnisch sagen lässt: „Es treibt sich der Bürgersmann, träg und dumm, wie des Färbers Gaul, nur im Ring herum.“

Und doch! Auch mit unseren Winkelfunktionen, die ja nichts anderes sind als biedere Verhältniszahlen, sind wir zwischen den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks jenem Gespensterreich nahe; wieder liegen wir gewissermaßen an der Grenze. Und wieder gibt es

---

1) $\frac{a^2}{c^2}$ ist bekanntlich dasselbe wie $\frac{a \cdot a}{c \cdot c}$ also gleich $\left(\frac{a}{c}\right)^2$.

2) Sprich: „Sinusquadrat Alfa plus Kosinusquadrat Alfa gleich eins“. Dabei ist $\sin^2$ nichts anderes als $\sin \alpha \cdot \sin \alpha = (\sin \alpha)^2$; also nur eine zweckmäßigere Schreibweise für „sin α zum Quadrat“.

einen „Brückenkopf“, einen warnenden, runenbedeckten Malstein, dessen geheimnisvolle Inschrift schon der alte Euler erkannte und lesen konnte. Er wird durch die berühmte **Eulersche Gleichung** dargestellt.

Sie sagt aus, dass

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

(sprich: *e* hoch *i*-alfa ist gleich . . . und so fort) ist. Da dieser Gleichung aber eine ganz andere Schreibweise der Winkel zugrunde liegt (sie werden hier wie in der ganzen Analysis im sogenannten Bogenmaß gemessen), so wollen wir nicht einmal versuchen, sie ins „bürgerliche“ Deutsch zu übersetzen.

Wir lassen das einmal hier so stehen, wie es ist, und nehmen nur zur Kenntnis, dass die beiden geheimnisvollen e und i auch hier wieder ihre Hand im Spiele haben. Die dritte Zahl π ist natürlich auch mit im Bunde, aber versteckt in der Maßangabe des Winkels enthalten, Von e, i und π die, wie wir wiederholt sahen, die ganze Mathematik regieren, kommen wir also nicht so bald los.



Die Sprache der Mathematik

Schon eingangs haben wir unseren Vorstoß in das Reich der Mathematik mit einem Spaziergang durch einen botanischen Garten verglichen. Nun gibt es aber sonst recht kluge und gebildete Leute, die einfach keine Freunde von botanischen Gärten sind. Fast immer ist es der gleiche Grund, den man für diese Abneigung hört: die verflixten „nur lateinischen" Bezeichnungen, die in diesen Gärten üblich sind. Man hat keine rechte Freude an noch so schönen und interessanten Pflanzen, wenn einem die Schilder nur einen unverständlichen lateinischen Namen verraten, den man ohnedies gleich wieder vergisst; genauso wie man sich ärgert, wenn zum Beispiel ein biederer Blumenkohlkopf „Brassica oleracea forma botrytis" genannt und ein ganz gewöhnlicher Rettich als „Raphanus sativus forma radicula" vorgestellt wird.

Nun, ganz so unrecht, denke ich, kann man dererlei Klagen nicht geben. Latein ist nun einmal nicht jedermanns Sache.

Leider kommt auch die Mathematik nicht ohne ihre **eigene** Sprache aus. Sie hat ihre eigenen Zeichen, Aussagen, Befehle und ihren eigenen Satzbau. Klang wie Niederschrift dieser ungeläufigen Ausdrucksweise jagen aber erfahrungsgemäß dem Nichtmathematikus einen nicht geringen Schrecken ein und stoßen ihn von vornherein ab. Und daher die endlosen Missverständnisse, die oft mitleiderregende Hilflosigkeit und Angst des Laien vor jeder Formel, wenn er es einmal mit einem solchen Schreckensding zu tun bekommt.

Versuchen wir also, die grundlegenden Eigenschaften dieser Sprache zu erklären und damit den größten Teil der Angst zu bannen, die den Laien in der Regel vor allen mathematischen Zeichen, Formeln und Aussagen befällt oder die er sich einredet.

Gehen wir von der Sprache des Alltags aus. Wie schon eine kurze Überlegung klarstellt, bildet den Kern eines Satzes das **Zeitwort** — richtiger gesagt das ***aussagende*** **Zeitwort** —, das **Prädikat**. Fehlt dieses in einem Satz, so ist er unvollkommen und unverständlich und ergibt nur in Ausnahmefällen einen Sinn, und zwar immer nur dann, wenn das aussagende Zeitwort mühelos ergänzt werden kann, wie etwa in den Feststellungen: „O, diese Kinder!" oder „Grässliches Eisenbahnunglück". Genau so ist es in der Mathematik, nur mit einem großen und erfreulicherweise die Angelegenheit sehr vereinfachenden Unterschied. Während wir in unserer angeborenen Muttersprache (ganz besonders im Deutschen) über eine sehr große Zahl von aussagenden Zeitwörtern verfügen, gibt es in der Mathematik eigentlich nur ein einziges, es ist das allgemein bekannte, überall und immer vorkommende **Gleichheitszeichen** „=", in Worten ausgedrückt: „ist gleich". Neben diesem Haupt- und Grundzeitwort der Mathematik spielen alle anderen, wie etwa das Zeichen „ist größer als" > oder dessen Umkehrung „ist kleiner als" < keine so wichtige Rolle. Es ist auch klar, dass dieses

G1eichheitszeichen stets nur einen **Tatsachenbestand**, **eine Feststellung**, eine gefundene Wahrheit ausdrücken kann, wie z. B. die jedem Volksschüler bekannten mathematischen Aussagen $3 \cdot 4 = 12$ oder $7 - 4 = 3$. Was hierbei die meisten zwar gefühlsmäßig in sich aufgenommen haben, aber noch nicht mit genügender Klarheit erfassen, sind die neben dem allgewaltigen Gleichheitszeichen verwendeten übrigen mathematischen Zeichen.

Während das **Gleichheitszeichen**, wie schon erwähnt, eine hart klingende und unumstößliche **Feststellung** ausdrückt, sind so gut wie alle anderen Zeichen der Mathematik als **Befehle** zu werten, ganz gleich, ob wir von dem allgemein bekannten + - oder – -Zeichen oder von dem unheimlichen Integralzeichen $\int$ sprechen. Es handelt sich immer nur um den Befehl oder, wenn man will, um das Signal, eine bestimmte Rechen**operation** durchzuführen. Deshalb werden diese Befehlszeichen auch als **Operatoren** bezeichnet. Jetzt erst sind wir groteskerweise imstande, irgendeine mathematische Aussage in unsere bürgerliche Sprache zurückzuübersetzen. Steht irgendwo $3 \cdot 4 = 12$ so bedeutet das in der gewöhnlichen Sprache ausgedrückt: Multipliziere drei mal vier; dann ist das, was herauskommt, gleich zwölf. Die Aussage $7 - 4 = 3$ heißt: Ziehe vier von sieben ab, so ist das, was übrigbleibt, gleich drei.

Dank diesen fast selbstverständlichen Feststellungen sind wir nun soweit, dass wir mit unseren mathematischen Sprachkenntnissen eine Schreibweise verstehen können, die für gewöhnlich jedem Nichtmathematiker große Schwierigkeiten bereitet: Das Rechnen mit **Buchstaben**. Die Buchstabenrechnung ist notwendig geworden, um in der mathematischen Sprache auch **allgemeine** Gesetze und Erkenntnisse festlegen und ausdrücken zu können.

Unsere gewöhnlichen Zahlen sind nicht geeignet, allgemeingültige Verhältnisse zu charakterisieren, und zwar deswegen nicht, weil jede besondere Zahl ihre Eigenheiten, ihre „Individualität" hat. Ein einfaches Beispiel: Ich soll den grundlegenden Unterschied zwischen Multiplikation und Addition zweier Zahlen festlegen. Mit besonderen Zahlen geht das nicht recht. Ich stoße dabei auf fürchterliche Widersprüche. Zum Beispiel: $2 \cdot 2 = 4$; ebenso richtig ist aber auch $2 + 2 = 4$. Wollte ich diesen Satz als allgemeingültig für alle Zahlen aufstellen, so käme ein arger Unsinn heraus, denn andere Zahlen verhalten sich bei der gleichen mathematischen Behandlung vollkommen anders. $1 \cdot 1$ ist zum Beispiel 1, während aber $1 + 1 = 2$ oder $3 \cdot 3 = 9$, dagegen $3 + 3 = 6$ ergeben. Der hier zugrunde liegende Unterschied tritt dagegen mit kristallener Klarheit augenblicklich zutage, wenn ich an Stelle jeder möglichen besonderen Zahl sozusagen als „Platzhalter" ein **Symbol** setzte, sagen wir den lateinischen Buchstaben a. Es ergibt sich dann die Weisheit $a \cdot a = a^2$. In unsere Sprache übersetzt heißt das: Jede beliebige Zahl mit sich selbst multipliziert, ergibt ihre Quadratzahl. Bei der Addition kommt etwas anderes heraus. Schreibe ich $a + a$ auf, so ist das Ergebnis dieser Rechnung $2a$, und ich sehe schon, in Worten ausgedrückt, dass irgendeine Zahl, zu sich selbst hinzugezählt, ihren doppelten Wert ergibt und nicht die Quadratzahl.

Festhalten muss man bei diesem Buchstabenrechnen nur eines: Die Zahl, die wir uns unter der Bezeichnung a vorstellen, muss innerhalb einer bestimmten Rechnung **immer und unbedingt ihren gleichen Wert** beibehalten; wir dürfen ja auch, wenn wir etwa aus unserem Monatsgehalt die Tagesausgaben berechnen, nicht plötzlich von DM auf Kokosnüsse umschwenken ☺ ! Tritt nämlich irgendeine andere Zahl dazu, so muss sie ein anderes Symbol bekommen, etwa b, c oder sonst einen anderen Buchstaben.

Und nun rechnen wir gleich lustig drauflos! Bekanntlich ist der Flächeninhalt eines Rechtecks gleich dem Produkt aus der kürzeren Seite mal der längeren. Wenn ich das in unsere Sprache der Mathematik übersetzen soll, so muss ich — auch das wird sehr selten mit der erforderlichen Klarheit gepredigt — zunächst die **Vokabeln** aufstellen und sagen: a ist die kürzere

Seite, *b* die längere Seite und *F* ist die Fläche. Dann ergibt sich in unserer mathematischen Sprache die **Formel**: $F = a \cdot b$. Um es nochmals zu betonen: Weiß ich nicht, was die Vokabeln, also *a*, *b* und *F,* bedeuten, so ist die Formel an sich unverständlich, man kann bestenfalls erraten, was mit ihr gemeint sein soll, kann aber auch bei diesem Rätselraten ebenso gut danebenhauen — eine Grundtatsache, die beachtet werden muss !

Weil wir gerade bei den „Vokabeln" sind, wollen wir hier gleich einfügen, dass es in der Mathematik eine ganze Reihe **feststehender Vokabeln** gibt, die ein für allemal immer und überall dieselbe Bedeutung haben und sozusagen nur Stenogramme für längere Begriffe oder Zahlenwerte sind. So zum Beispiel schreibt man nie die berühmte Ludolfsche Zahl, die in Wirklichkeit einen unendlichen Dezimalbruch darstellt, in Ziffern aus, sondern sagt und schreibt dafür einfach $\boldsymbol{\pi}$, genau so, wie man für die Basis des natürlichen Logarithmensystems, stets ***e*** sagt und schreibt.

Es gibt eine Reihe derartiger unveränderlicher Bezeichnungen in unserem Vokabularium. Sie sind leicht auswendig zu merken! Jetzt verstehen wir auch klar und deutlich die **Formeln**, nach denen Kreisumfang und Kreisfläche berechnet werden!

Wieder beginnen wir mit der Klarstellung der Vokabeln.

F sei die Fläche, *U* der Umfang und *r* der Radius (Halbmesser). Es ergeben sich für beide Beziehungen die Formeln

$$F = r^2 \pi \quad \text{und} \quad U = 2\, r\, \pi.$$

Noch eine hübsche Ergänzung dazu: Wir ändern eine Vokabel, richtiger gesagt, führen eine neue ein, indem wir den Halbmesser *r* beiseite lassen und den **Durchmesser** *d* einsetzen. Sofort lautet unsere Weisheit anders, nämlich es ergibt sich jetzt

$$F = \frac{d^2\pi}{4} \quad \text{und} \quad U = d\,\pi;$$

$$\text{denn es ist } r = \frac{d}{2} \quad \text{bzw.} \quad 2\,r = d.$$

Also noch einmal: Immer genau auf die Vokabeln achten, sie sind die unbedingt notwendige Voraussetzung, um mathematische Aussagen zu verstehen!

Nun aber kommt das vielleicht Wichtigste! Wir sprachen bisher stets nur von mathematischen Feststellungen, der Formulierung gefundener Lehrsätze. Bekanntlich ist aber die **Frage** die Seele aller Forschung, und es wäre schlecht um alle Mathematik von Anfang an bestellt, hätte sie die Möglichkeit zu fragen und damit zu forschen aus ihrem Begriffs- und Sprachschatz gestrichen. Es muss also auch einen mathematischen **Fragesatz** geben, einen Satz, in dem ein Resultat erst **gesucht** wird.

Natürlich gibt es ihn. Nur weicht er vollkommen von dem Fragesatz unserer Sprache ab, und zwar dadurch, dass der mathematische Fragesatz immer wieder in der schon gewohnten Form der Feststellung, deren Seele das Gleichheitszeichen ist, niedergeschrieben und aufgestellt wird. Und ein grundlegender, aber gerade wegen seiner Einfachheit genialer Kniff verwandelt die im Grunde noch immer bestehende Feststellung in eine Frage, indem wir diejenige Größe, die wir **nicht kennen**, auf die es uns aber ankommt und die wir ermitteln möchten, mit einem **besonderen Buchstaben** bezeichnen. — Bei der Ableitung der logarithmischen Wurzelregel

haben wir übrigens diese Tatsache bereits vorweggenommen. — Diesen Ehrenplatz hat das kleine lateinische x errungen. Sollen wir mehrere Größen suchen, so kommen die übrigen Buchstabenbrüder nach dem x aus dem Ende des Alphabets dazu, und zwar y, z, das u und so fort. Aber bleiben wir vorläufig der Einfachheit halber nur beim x. Es bezeichnet also immer die **unbekannte**, die **gesuchte Größe**.

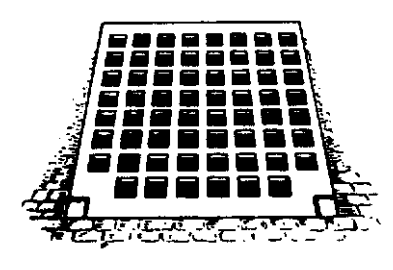
Und eine der großartigsten und wichtigsten Erkenntnisse, die selten genügend gewürdigt wird, enthält der einfache Satz:

Was wir wissen wollen und noch nicht wissen, nennen wir x!

Jetzt sind wir endlich so weit, um einen neuen Ausdruck, der sonst den Nichtfachmann mit Schrecken erfüllt, mit Gleichmut hinnehmen zu können, nämlich die Bezeichnung der **Gleichung**.

Was ist eine Gleichung? Die Antwort ist sehr einfach, nämlich: Eine Gleichung ist eine mathematische Aussage, die Gleichung ist dasjenige, was in unserer gewöhnlichen Sprache der normale aussagende Satz ist. Eine Gleichung ist z. B. die Feststellung der Tatsache, dass $2 \cdot 2 = 4$ ist, eine Gleichung ist die Kreisformel $F = r^2 \pi$ und so fort. Auch die Seele der Gleichung kennen wir schon: Es ist das Gleichheitszeichen. Und von dem Geheimnis des Gleichheitszeichens und der Gleichung wollen wir im folgenden etwas mehr erfahren und spielend das lernen — freilich nur in seinen allereinfachsten Grundlagen —, was viele Menschen zeit ihres Lebens nicht erlernen können, nämlich das berühmte und berüchtigte **Ansetzen** einer Gleichung, was gleichbedeutend ist mit der Übersetzung einer forschenden Frage aus unserer täglichen Gemeinsprache in die Sprache der Mathematik.

Nehmen wir ein ganz einfaches Beispiel her. Was ein Kanalgitter ist, weiß jedermann: eine schwere gusseiserne Platte, regelmäßig von quadratischen Löchern durchsetzt, die den Abfluss von Regenwasser und Schmutz ermöglichen. Die Größe der, meistens quadratisch gearbeiteten, Platten ist im einzelnen unterschiedlich; sie hängt von den örtlichen Gegebenheiten ab. Somit wird im allgemeinen auch die Anzahl der Löcher jeweils verschieden sein. — Nun muss ein Kanalgitter auch Gelenke haben, damit es auf- und zugeklappt werden kann. Um diese anzubringen, müssen zwei Löcher in den Ecken fortgelassen werden. Unsere einfachste mathematische Frage lautet nun: Wie viel Löcher haben alle Kanalgitter, die in der angegebenen Form ausgeführt sind? Macht man sich die Mühe und zählt die Löcher ab, so kommt man leicht darauf, dass ein Kanalgitter soviel Löcher haben muss, wie die Anzahl der Löcher an einer Seite mit sich selbst multipliziert ergibt. Sind also 5 Löcher an einer Seite, so gibt es insgesamt 25, sind 9 da, so gibt es 81 Löcher, und so fort. Der Angeln wegen aber fallen zwei wieder weg, so dass wir in Wirklichkeit nur 23, bzw. 79 Löcher haben.


Das Kanalgitter und die Mathematik

Durch Abzählen und durch Überlegung in unserer gewohnten Umgangssprache haben wir die Frage glatt gelöst. Jetzt aber wollen wir sie in die Sprache der Mathematik übersetzen. Wieder beginnen wir mit dem wichtigsten Teil, der Aufstellung des Vokabulariums. Was wir wissen wollen und nicht wissen, ist die Gesamtzahl der Deckellöcher. Sie heißen daher für uns x. Die Anzahl der an einer Seite befindlichen Löcher ist uns bekannt. Wir bezeichnen sie daher mit a; und so ergibt sich die

an Kanalgittern verschiedenster Abmessung vorhandene Anzahl von Löchern ganz einfach durch die Beziehung

$$x = a^2 - 2.$$

Einen Augenblick müssen wir noch bei dieser ersten Gleichung, die uns gelungen ist, verweilen. Was nämlich nicht ganz klar ist und auf den ersten Blick irreführen könnte, ist die Frage: Warum schrieben wir $x = a^2 - 2$ und nicht etwa $x = (a - 2)^2$? Nun, da stoßen wir wieder auf so etwas, was in unserer gewöhnlichen Umgangssprache gleichfalls von eherner Bedeutung ist, wenn es auch leider nur allzu häufig vernachlässigt wird. Es ist nämlich die **Zeitfolge**, die in jedem Bericht, in jeder Erzählung eingehalten werden soll (oder muss!). Darunter versteht man nicht nur die Unterscheidung zwischen Zukunft, Gegenwart und Vergangenheit; auch das einfache Vorher und Nachher kann schon von grundlegender Bedeutung sein. Die Aussage: „A1s der Schnellzug in die Station einlief, stiegen die Reisenden aus“, ist eigentlich ein Katastrophenbericht, denn das Aussteigen aus einem noch in Bewegung befindlichen Zug ist eine lebensgefährliche Sache. Dagegen besagt der Satz: „Als der Schnellzug in die Station eingelaufen war, stiegen die Reisenden aus“ eine alltägliche Selbstverständlichkeit.

Noch sorgfältiger unterscheidet aber die Mathematik die Zeitfolge, denn jede Vernachlässigung des Vorher und Nachher ruft hier sofort Verwirrung und Unstimmigkeiten hervor. Ein Beispiel: Was ist $2 + 4 : 2$? Es leuchtet sofort ein, dass es nicht gleichgültig ist, ob ich in diesem Falle zuerst die vier halbiere und dann addiere oder umgekehrt verfahre. Denn in dem einen Falle kommt 4, im andern 3 heraus. Wir müssen also genau zwischen Vorher und Nachher unterscheiden. Die mathematischen Zeichen aber, die die einzuhaltende Reihenfolge der Rechenbefehle angeben, kennen wir schon; es sind die **Klammern**. Hier gilt das Gesetz: Die Operationen in den Klammern sind stets zuerst auszuführen, dann erst kommt, was außerhalb der Klammern steht. Schreibe ich den Befehl $(a - 2)^2$ nieder, so lautet dieser in der Umgangssprache: Du musst zunächst die zwischen den Klammern gegebene Rechenoperation durchführen und dann erst an die herangehen, die außerhalb der Klammern steht. Also: Ziehe erst von a die zwei ab, und dann multipliziere das, was übrigbleibt, mit sich selbst. Dieses Ergebnis entspricht aber nicht unserer Aufgabe, weil wir zuerst das a mit sich selbst multiplizieren müssen, um aus der Anzahl der Löcher an einer Seite die Gesamtanzahl der Löcher zu erhalten, von denen dann zwei wegfallen. Es bleibt also in unserem Kanalgitterbeispiel bei der Gleichung: $x = a^2 - 2$.

Jetzt noch eine andere Rechnung, bei der wir denselben Weg gehen, das heißt, die in Worten gegebene Forderung wieder in unsere mathematische Sprache übersetzen wollen. Eine Scherzfrage lautet: „Ein Ziegelstein wiegt soviel wie ein halber Ziegelstein und ein Kilogramm. Was wiegt also der ganze?“ Viele werden auf den ersten Blick die selbstverständliche Lösung dieser Aufgabe „herausfühlen“. Die meisten aber werden durch die seltsame Aussage derartig verblüfft sein, dass sie nachdenken und dann erst recht nichts herausbekommen. Versuchen wir, das Gelernte hier anzuwenden und die verzwickte Angelegenheit in das Kleid der mathematischen Ausdrucksweise zuhüllen. Wieder beginnen wir mit der Aufstellung des „Vokabulars“. Was ist es, was wir nicht wissen und doch wissen möchten? Ohne Zweifel das Gewicht des **ganzen** Ziegelsteines, das wir also unserer Vereinbarung gemäß x nennen. Damit ist eigentlich schon alles getan, denn es ergibt sich nun aus dem Gesagten: Das Gesamtgewicht x ist dem halben Gesamtgewicht plus 1 kg gleich oder in der mathematischen Form aufgeschrieben:

$$x = \frac{1}{2}x + 1,$$

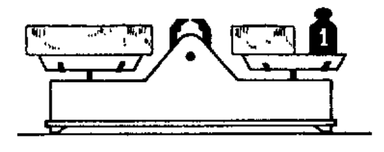
wobei wir das kg als überflüssige Bezeichnung weglassen, weil wir es uns ja genau merken können, dass wir mit Kilogramm und nicht etwa nach Pfund oder Lot rechnen.

Nun steht diese Gleichung vor uns. Und jetzt müssen wir uns an eine Freiheit erinnern, die uns die strengste aller Wissenschaften großzügig gewährt. Wir können nämlich mit dieser Gleichung (wie schließlich mit jeder) **machen was wir wollen**, vorausgesetzt nur, dass wir an **beiden Seiten dasselbe** durchführen. Trotzdem wird die Gleichung immer richtig sein. Wir können also die Gleichung mit 1000 multiplizieren, wenn es uns Spaß macht, wir erhalten dann einfach

$$1000\,x = 500\,x + 1000.$$ [1)]

Ebenso bleibt alles richtig, wenn wir zu der Gleichung auf beiden Seiten eine beliebige Zahl hinzuzählen oder abziehen, Die Gleichung

$$x + 1\,000\,000 = \frac{1}{2}x + 1\,000\,001$$



Die Gleichung und die Küchenwaage

stimmt auch, ja selbst wenn wir die Gleichung durch irgendeinen noch so komplizierten mathematischen Ausdruck teilen, bleibt alles richtig.

Es ist genau so wie mit einer Waage, die geradezu „Gleichungsauflösungsmaschine“ genannt werden könnte. Jede Waage zeigt nämlich aufs deutlichste, warum wir uns das alles erlauben können. Denn ist die Waage erst im Gleichgewicht, so können wir rechts und links auf die Waagschalen dazugeben oder wegnehmen, was wir wollen, die Waage wird im Gleichgewicht bleiben, wenn wir nur auf beiden Schalen immer das gleiche durchführen. Haben wir zum Beispiel auf der einen Seite der Waage 1 kg Bohnen liegen und auf der anderen 1 kg Äpfel, so ist die Waage im Gleichgewicht und bleibt es auch, wenn wir auf jede Seite etwa noch 5 kg Kohlen dazulegen oder die Anzahl der Äpfel und Bohnen in gleicher Weise teilen, also von jeder Menge nur ein Zehntel nehmen.

Merken wir uns also:

Mit einer Gleichung kann man machen, was man will, sie bleibt immer unbedingt richtig, wenn man nur **links** vom Gleichheitszeichen genau **dasselbe** macht wie **rechts** vom Gleichheitszeichen.

Natürlich sind alle vorhin angeführten Veränderungen nichts als müßige Spielerei; aber wir können bestimmte Veränderungen der Gleichung, die uns erlaubt sind, dazu benutzen, unser gesuchtes x aus seinen anderen Beziehungen gewissermaßen herauszuschälen und, von allem Ballast befreit, für sich allein darzustellen, so dass wir auf der einen Seite vom Gleichheitszeichen nur mehr ein x stehen haben und auf der anderen Seite einen Wert, der uns

---

[1)] Beachte, jedes einzelne Glied der Gleichung $x = \frac{1}{2}x + 1$ wird mit 1000 multipliziert!

angibt, wie groß dieses x ist. Damit ist alles, was wir angestrebt haben, erreicht, das heißt die Gleichung **aufgelöst**. Schreiben wir also unsere Gleichung nochmals hin:

$$x = \frac{1}{2}x + 1$$

und stellen die Frage: Welche Rechenoperation müssen wir durchführen, um unser x in „Reinkultur“ herauszubekommen? Es steht ja schon für sich allein auf der einen Seite der Gleichung. Uns stört aber noch, dass ein Bruchteil des x auf der rechten Seite der Gleichung auch noch da ist. Es ist ganz klar, dass wir um einen sehr wesentlichen Schritt weiterkommen, wenn wir dieses $\frac{1}{2}x$ wegbringen könnten. Wie man das machen kann? Wir ziehen einfach von dieser Seite der Gleichung $\frac{1}{2}x$ ab. Das dürfen wir, niemand kann uns das verbieten, **wenn wir auch auf der anderen Seite der Gleichung wieder $\frac{1}{2}x$ abziehen**. Versuchen wir es! Wir bekommen dann heraus

$$x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + 1$$

$$\frac{1}{2}x = 1$$

Wir sind damit tatsächlich weiter gekommen, aber wir haben in einer gewissen Beziehung den Teufel mit Beelzebub ausgetrieben; denn unser vorhin für sich allein auf der linken Seite stehendes x ist verschwunden, und nur mehr seine Hälfte steht da! Es ist auch jetzt nicht schwer, sofort weiterzukommen, wenn wir wieder von unserer Freiheit Gebrauch machen und unsere Gleichung mit 2 multiplizieren, natürlich wieder rechts und links, und wir erhalten sofort die Gleichung:

$$x = 2.$$

Wir sind am Ende! Das x hat seine Schuldigkeit getan, wir brauchen es nicht mehr und übersetzen nun die gefundene Weisheit in die Umgangssprache zurück, indem wir einfach sagen:

Das Gewicht des Ziegelsteines beträgt zwei Kilogramm.

Weil wir vorhin von der Waage sprachen, sei zur Erläuterung des hier Erklärten noch die Methode angegeben, wie wir unsere Gleichung mit Hilfe dieses alltäglichen „Instrumentes“ auflösen. Wir legen auf eine Waagschale einen ganzen Ziegelstein und auf die andere Waagschale einen halben und ein Einkilogrammgewicht. Wieder ziehen wir unser $\frac{x}{2}$, also das Gewicht des halben Ziegelsteines, von beiden Seiten ab (natürlich muss man dabei den ganzen Stein „zerbrechen“). Wie sofort ersichtlich, zeigt die Waage auf der einen Waagschale den halben Ziegelstein, auf der anderen Schale das Kilogrammgewicht, und jetzt ist es nicht mehr schwer, auszurechnen, wie viel der ganze Ziegelstein wiegt, wenn man weiß, wie schwer der halbe ist.

Hier noch ein Beispiel für das Auflösen einer Gleichung scheinbar verwickelteren Aufbaus. Wir wären zum Beispiel auf die Beziehung gestoßen:

$$\frac{3}{7}x - \frac{2}{5}x = \frac{2}{35}.$$

Das sieht schon einigermaßen gefährlich aus! Aber unsere Freiheit, mit einer Gleichung treiben zu können, was wir wollen, hilft uns sofort über den Berg.

Wir wollen zunächst den Brüchen links den Garaus machen und die Subtraktion durchführen. Wir bleiben jetzt nur auf der linken Seite der Gleichung, da wir durch das durchzuführende Rechnen den Wert der linken Gleichungsseite in keiner Weise verändern, denn ob wir die Brüche so stehen lassen, wie sie sind, oder sie ausrechnen, bleibt sich vollkommen gleich. Es wird eben nichts verändert, und da wir links nichts verändert haben, so brauchen wir auch rechts nichts zu verändern. Nach der bekannten Regel[1)] müssen wir die beiden Brüche auf den gleichen Nenner bringen, um sie abziehen zu können, und erhalten auf diese Weise

$$\frac{15}{35}x - \frac{14}{35}x = \frac{2}{35}$$

Nun führen wir die Subtraktion links durch und erhalten

$$\frac{1}{35}x = \frac{2}{35}$$

Jetzt soll es dem Bruch links an den Kragen gehen. Das Verfahren ist einfach: Wir multiplizieren beide Teile der Gleichung mit 35. Das dürfen wir, und somit erhalten wir

$$x = 35 \cdot \frac{2}{35}$$

Rechts neben dem Gleichheitszeichen steht jetzt folgender Rechenbefehl: Multipliziere 2 mit 35 und teile dann, was herauskommt, durch 35! Das ergibt 70 : 35 = 2, eine Weisheit, die wir auch direkt hätten finden können; denn Multiplikation und Division mit derselben Zahl heben einander glatt auf. Wir erhalten demnach als endgültige Lösung:

$$x = 2.$$

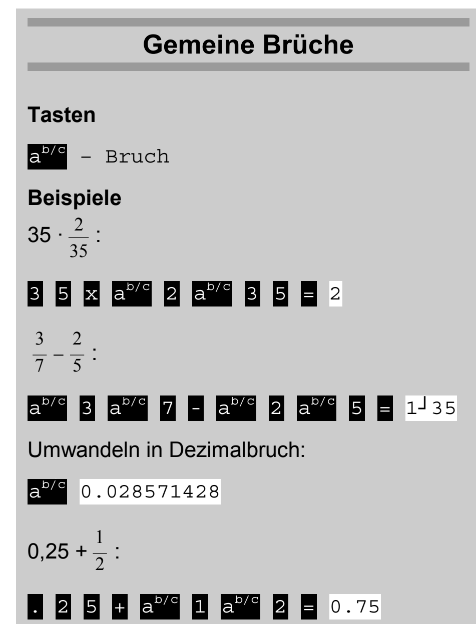
Wie schon diese allereinfachsten Beispiele zeigen, liegt die eigentliche Schwierigkeit unserer Gleichungsrechnerei — wenn wir vom Aufstellen der Gleichung absehen, das wir hier ja auch nur andeuten konnten — in **der richtigen Weiterbehandlung der Gleichung**. Das Ersinnen der richtigen Kniffe, um die Gleichungen so vereinfachen und schließlich klar und durchsichtig werden lassen, dass wir das x wie einen aus der Hülle gelösten Kristall aus dem verwickelten Gefüge der gegebenen Beziehungen herausheben können. In dem Finden dieser Kniffe zeigt sich nun der Meister, der wirkliche Rechner. Es ist klar, dass dies einen gewissen rechnerischen Spürsinn und sehr große Übung voraussetzt. Aber genau so, wie man das Lösen

---

[1)] Für diejenigen, die den hier zugrunde liegenden Rechenkniff nicht kennen: Man kann bekanntlich nur Brüche, die gleichen Nenner haben, addieren oder subtrahieren. Dazu müssen wir hier Fünfunddreißigstel (7 · 5 = 35) nehmen. Nenner und Zähler des ersten Bruches werden dazu mit 5 und Nenner und Zähler des zweiten Bruches mit 7 multipliziert. Dieser „Rechenwitz“ wird schon in der Volksschule gelehrt.

von Kreuzworträtseln in kürzester Zeit zu einer wahren Meisterschaft ausbilden kann, wie man auch die hierbei unumgänglich notwendigen Kniffe und Pfiffe kennenlernt, so wird auch das Lösen von Gleichungen zu einem „Sport“, in dem derjenige, der ihn mit Fleiß und Ausdauer betreibt, schließlich eine Fertigkeit erlangt, die dem Ungeübten oft geradezu unerklärlich erscheint. Und wenn wir noch einen Rat geben dürften, so wäre es der, an Stelle des allmählich langweilig gewordenen Lösens von Kreuzworträtseln lieber die unvergleichlich geistreichere Auflösungskunst von Gleichungen zu üben. Jedes Lehrbuch für höhere Schulen ist hier der beste Führer, der das Wichtigste verrät, was man auf diesem großen Gebiet wissen muss.







Gezeichnete Mathematik

Wie wir bereits angedeutet haben, besteht zwischen allen mathematischen Gedanken und Überlegungen und der Geometrie ein merkwürdiger Zusammenhang. Man könnte die Geometrie, die so seltsame Bilder zu allen gefundenen mathematischen Wahrheiten abgibt, gewissermaßen die Illustrationskunst der Mathematik nennen, ihre Abbildung im handgreiflich Vorstellbaren. Die Zahlengerade zum Beispiel war auch schon eine Abbildung. jetzt wollen wir diesen merkwürdigen Zusammenhängen etwas genauer nachgehen, wobei wir auf seltsame Wunder stoßen werden, die der großen Menge meist recht unbegreifbar erscheinen.

Noch einmal müssen wir auf unsere Kunst, Gleichungen aufzustellen und zu lösen, zurückgreifen, allerdings mit einer wesentlichen Erweiterung, und zwar nehmen wir uns jetzt eine Gleichung vor, bei der nicht **ein** Gefragtes, Gesuchtes, nicht nur **ein** x vorkommt, sondern in welcher noch eine **zweite** uns unbekannte Größe erscheint, die wir y nennen. So eine Gleichung mit zwei Unbekannten hat etwa die Form:

$$3\,x - y + 5 = 0.$$

Dass auf der einen Seite unserer Gleichung nichts vorhanden ist, das heißt eine Null steht, braucht uns weiter nicht zu erschrecken. Es ist das eine Schreibweise, richtiger gesagt, eine Form, auf die wir jede Gleichung bringen können. Wir können unsere Gleichung schließlich auch anders niederschreiben. Zählen wir etwa auf beiden Seiten der Gleichung y dazu, so heben sich dieses dazugezählte y und das abzuziehende auf der linken Seite der Gleichung gerade auf.

Wir bekommen dann die Form

$$3\,x + 5 = y.$$

Sehen wir uns die Gleichung in dieser Form einmal etwas genauer an. Sie hat jetzt eine sehr handliche und einfache Gestalt angenommen, da auf einer Seite das y allein für sich steht, also leicht zu „greifen“ ist. Wie aber nicht weiter bewiesen zu werden braucht, hat es mit dieser Gleichung auch eine merkwürdige Bewandtnis. Sie ist für sich allein, so wie sie dasteht, nämlich nicht eindeutig auflösbar, sondern wir erhalten unendlich viele Lösungen. Denn in die gewöhnliche Umgangssprache übertragen, besagt diese Gleichung ja nur: Dreimal der Wert für x genommen, vermehrt um 5, ergibt den Wert, den wir y nennen wollen. Nehme ich zum Beispiel für $x = 1$, so ergibt sich für y die Größe $3 + 5 = 8$. Nehme ich für $x = 2$, so ergibt sich ebenso: $6 + 5 = 11$, und so fort. Es ist klar, wenn wir eine solche Gleichung auflösen wollen, muss noch eine **zweite** Gleichung da sein, die Näheres über das gegenseitige Verhältnis von x zu y aussagt oder fordert. Wir merken uns den wichtigen mathematischen Grundsatz, der hier aufzuscheinen beginnt: Sind **zwei Unbekannte vorhanden, so müssen**

auch zwei (von einander verschiedene!) **Gleichungen da sein**, wenn eindeutige Werte für x und y gesucht werden. Haben wir zum Beispiel fünf verschiedene Unbekannte, so brauchen wir auch fünf verschiedene Gleichungen, und so fort. Dass die Sache jetzt geht, ist ohne weiteres klar. Lautet unsere zweite, gegebene Gleichung z.B. $x + y = 3$, so gibt es für diese beiden Forderungen nur mehr eine einzige Lösung, ein einziges Wertepaar für x und y. Das herauszukriegen, ist nicht schwer; der Kunstgriff, der dabei befolgt wird (es gibt deren mehrere), besteht in seiner einfachsten Form darin, dass wir aus einer Gleichung ein x oder y ausrechnen und diesen Wert dann in die andere einsetzen. Dadurch verschwindet in der zweiten so behandelten Gleichung eine Unbekannte, wir haben es also nur mehr mit einer zu tun und können die Nuss knacken. in unserem Falle steht y schon ausgerechnet da; es ist nämlich so groß wie $3x + 5$. Jetzt kommt die zweite Gleichung dran, in der wir für y einfach $3x + 5$ schreiben. Wir erhalten:

$$x + 3x + 5 = 3.$$

Nun können wir das her Geschriebene durch gewöhnliche Addition wesentlich vereinfachen, denn $x + 3x$ sind ja $4x$. Wir erhalten also zunächst $4x + 5 = 3$. Nun ziehen wir auf beiden Seiten der Gleichung 5 ab, wobei sich $4x = -2$ ergibt. Beide Seiten der Gleichung, nunmehr durch 4 geteilt, ergeben $x = \frac{-2}{4}$, was soviel heißt wie

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Das x ist uns also bekannt, so dass wir es gar nicht mehr nötig haben, diese „Unbekannte“ noch in unseren beiden Gleichungen

$$(1) \quad 3x + 5 = y \qquad (2) \quad x + y = 3$$

mitzuschleppen. Wir setzen einfach für x den Wert $\frac{1}{2}$ ein und erhalten

$$(1) \quad \frac{-3}{2} + 5 = y \qquad (2) \quad -\frac{1}{2} + y = 3$$

Eine der beiden Gleichungen ist jetzt natürlich überflüssig. Wir haben ja nur noch eine Unbekannte und da genügt auch eine Gleichung. Welche Gleichung man auswählt, ist gleichgültig, denn aus beiden Gleichungen muss sich dasselbe y ergeben. Man nimmt im Allgemeinen diejenige, mit der man am schnellsten zum Ziel kommt. So erhalten wir aus

$-\frac{1}{2} + y = 3$, wenn wir auf beiden Seiten $\frac{1}{2}$,addieren, sofort $y = 3\frac{1}{2}$.

Und noch eine Kleinigkeit, eigentlich das Schönste an unserer Gleichungslöserei, die **Probe** ! Dazu brauchen wir nur die Lösungen in die Gleichungen einzusetzen, von denen wir ausgegangen sind. Wenn dann alles so schön aufgeht, wie in unserem Beispiel, so können wir beruhigt sein; wir haben richtig gerechnet.

$$(1) \quad 3x + 5 = y \qquad (2) \quad x + y = 3$$

$$\frac{-3}{2} + 5 = 3\frac{1}{2}\,^{1)} \qquad -\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 3$$

$$3\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \qquad 3 = 3$$

Noch ein unterhaltsames Rechenbeispiel, das gewissermaßen einen „Aufsitzer" darstellt.

Ein Wirt verkauft den Liter Wein mit Flasche für 1,20 DM. Ein sparsamer Kunde, der sich seine eigene Flasche mitbringt, will wissen, was der Wein allein, ohne Flasche, kostet.

„Der Liter Wein kostet 1 DM mehr als die Flasche", antwortet der Wirt. Was kosten demnach Wein und Flasche für sich allein?

Der Aufsitzer liegt darin, dass man nur allzu leicht geneigt ist, zu behaupten: „Nun, der Wein kostet eben eine DM und die Flasche zwanzig Pfennige!"

Wir beginnen wieder mit der Aufstellung des „Vokabulars". Was wir nicht wissen, ist der Flaschen- und Weinpreis. Also sei:

Preis des Weins je Liter = x,

Preis der leeren Flasche = y.

Somit können wir, indem wir der Einfachheit halber mit Pfennigen rechnen, ansetzen:

Ein Liter Wein plus Flasche kosten 120 Pfennige, das heißt mathematisch:

$$(1) \quad x + y = 120.$$

jetzt kommt aber noch die zweite Behauptung:

Der Wein kostet 100 Pfennige mehr als die Flasche, was mathematisch ausgedrückt so lautet:

$$(2) \quad y + 100 = x.$$

Nun haben wir also die beiden Gleichungen für die beiden Unbekannten.

Das $x = y + 100$ setzen wir für das x der ersten Gleichung ein: $y + 100 + y = 120$. Dann werden die beiden Ypsilon zusammengezählt und die beiden Seiten der Gleichung um 100 vermindert, so dass wir auf der einen Seite dann nur mehr die Ypsilon haben. Also: $2y = 20$, woraus sich nach Division beider Seiten der Gleichung durch 2 ergibt:

$$y = 10.$$

Hurra! — Da wir mit y den Flaschenpreis bezeichnet haben, so wissen wir nun schon:

---

1) Beachte den Unterschied zwischen $\mathbf{3} \cdot \frac{1}{2}$ und $3\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$ ist nichts anderes als $3 + \frac{1}{2}$.

Preis der Flasche = 10 Pfennige.

Daraus ergibt sich weiter das x:

$$x + 10 = 120$$
$$x = 120 - 10$$
$$x = 110.$$

Unser x, der Weinpreis, beträgt also 110 Pfennige, so dass dieser Preis tatsächlich um 1 DM höher liegt als der Flaschenpreis, der nur 10 Pfennige ausmacht. — Aber diese Art der Auflösung von Gleichungen sei hier nur nebenbei erwähnt. Wir wollen in einer anderen Richtung vorstoßen und nehmen wieder nur eine, und zwar die zuerst gegebene Gleichung:

$$y = 3\,x + 5.$$

Wir wählen beliebige Werte für das x und wollen sehen, was aus unserem y wird. Setzt man nun die verschiedenen Werte für x ein, kommen auch immer wieder verschiedene Werte für y heraus.

In Tabellenform zusammengeschrieben, ergibt sich etwa:

$x =$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	...
$y =$	-4	-1	$+2$	$+5$	$+8$	$+11$	$+14$	$+17$	...

Wie wir sehen, könnten wir dieses Spiel bis in alle Ewigkeit fortsetzen, zu jedem x gibt es immer einen Wert für y. Bevor wir auf diese sogenannte „Wertetafel" näher eingehen, wollen wir erst noch eine andere sonderbare Eigenschaft der Gleichung herausgreifen. Wie nämlich nicht erst bewiesen zu werden braucht, sind wir bei der Wahl des x frei und können jeden beliebigen Wert dafür annehmen. Haben wir das aber getan, so ist uns das y vorgeschrieben, das heißt, der betreffende Wert kommt automatisch und bestimmt durch die Rechnung heraus.

Natürlich könnte man das auch „umdrehen", das heißt y beliebig wählen, woraus sich dann immer bestimmte x-Werte ergeben müssten. Bleiben wir aber bei der üblichen Reihenfolge. x soll also stets das Diktierende, Bestimmende sein, y das Folgende, das sich ergibt. Deshalb formen wir i. A. unsere Gleichungen, die wir gerade betrachten wollen, auch stets so um, damit das y schön handlich für sich allein auf einer Seite steht.

Und nun müssen wir den Mut haben, das Kind beim rechten Namen zu nennen. Unsere beiden Zahlensymbole x und y unterscheiden sich jetzt von anderen, wie etwa 3; 5; $\sqrt{2}$; π und so fort, dadurch, dass sie **veränderlich** sind. Man nennt sie daher auch **Variable** (= „Veränderliche"), und zwar ist dann

x die **unabhängige** Variable;

y die **abhängige** Variable.

Und jede in Form einer Gleichung gegebene Beziehung zwischen einer derartigen abhängigen und einer unabhängigen Variablen nennt man dann eine **Funktion**.

Unser x und y bekommen jetzt neue Bedeutungen. Bisher haben wir sie nur als unbekannte, zu suchende Zahlen kennengelernt. Jetzt sind sie in diesem Zusammenhang **variabel** (= ver-

änderlich) geworden. Aber wohlgemerkt: Bei einer Funktion sind wir nur mehr bei der unabhängigen Größe (Variable) ganz frei, die wir nach Belieben annehmen können. Die andere, die abhängige, ergibt sich aus dieser Wahl von selbst.

Hierzu noch eine Warnung und Aufklärung zugleich: Es hat sich eingebürgert, den Funktionsbegriff durch eine Formel auszudrücken, zu symbolisieren, und zwar schreibt man in der Sprache der Mathematik die Aussage „y ist eine Funktion von x“ ganz allgemein so auf:

$$y = f(x).$$

Die Schreibweise $y = f(x)$ ist (für uns) **keine** direkt zum Rechnen bestimmte Formel, sondern nur der Ausdruck dafür, dass eine Größe (y) von einer anderen (x) auf irgendwelche nicht näher angegebene Weise abhängt. Man kann zum Beispiel getrost schreiben: „Kassenstand = f(Einnahmen)“; aber auch nicht mehr. Diese überall geübte Schreibweise $y = f(x)$ besagt eben nur, dass y von x abhängt, aber nicht wie diese Abhängigkeit x im einzelnen aussieht.

Also merken: Nicht über $y = f(x)$ stolpern !

Die ganze Sache, die wir mit der Aufstellung des Begriffes einer „Funktion“ ausgegraben haben, sieht auf den ersten Blick etwas bedrohlich aus. Und es scheint die Frage naheliegend: Wozu bei einer so lückenhaften Betrachtung, bei einem so kleinen Spaziergang durch das Riesenreich der Mathematik, den so gesucht aussehenden Funktionsbegriff aufgreifen und breittreten?

Nur derjenige, den die eigenartige Schreibweise der Mathematik verblüfft oder abstößt, kann eigentlich so fragen. Denn der Funktionsbegriff ist der natürlichste und einfachste von der Welt. Er ist eigentlich nichts anderes als das ins Mathematische übersetzte, alles Weltgeschehen geradezu diktierende Grundgesetz von **Ursache** und **Wirkung**. Unser vorhin gefundenes $y = f(x)$ heißt nämlich in unsere Alltagssprache übersetzt etwa soviel wie: Weil irgendeine x genannte Größe so ist, muss nach irgendeinem Gesetz die Größe y so sein!

Dazu ein paar Beispiele:

Zunächst einmal ein ganz alltägliches, aber (leider! ☺) für jedermann sehr wichtiges. Nehmen wir die Geldverhältnisse eines kleinen Angestellten. Am Monatsersten bekommt er sein Gehalt ausbezahlt, das — allmonatlich meist auch restlos — aufgebraucht werden soll Unser Mann wird also am Ersten über das meiste Geld verfügen, dann schmilzt es von Tag zu Tag zusammen und wird am Dreißigsten oder Einunddreißigsten (häufig auch früher! ☺) immer wieder Null sein. Es ist nun ohne weiteres klar, wodurch der jeweilige Kassenstand unseres Angestellten diktiert und bestimmt wird: nämlich vom Datum, von der Zeit. Es ist also richtig, wenn man sagt, dass der Geldbesitz des kleinen Mannes eine Funktion des Datums sei. Nehmen wir an, unser Angestellter bekäme 1.200 DM an jedem Monatsersten bar auf die Hand. Gönnt er sich jeden Tag gleich, viel, so hat er dann (bei einem Monat mit 30 Tagen)

am	1.	2.	3.	. . .	28.	29.	30.
DM	1.200,-	1.160,-	1.120,-	. . .	120,-	80,-	40,-

Von einigen Ungenauigkeiten abgesehen, die sich durch größere Ausgaben und diese einholende Sparsamkeit ergeben, stimmt die Sache so ziemlich.

Wie lautet nun die Formel dieser Funktion?

Wir beginnen wieder mit der Festlegung des Vokabulars. y ist das Monatsgehalt, also 1.200 DM, f(x) ist:

$$\text{Monatsgehalt} - ((\text{Tag im Monat} - 1) \cdot \frac{\text{Gehalt}}{\text{Tage im Monat}}).$$

Warum?

Das Monatsgehalt ist klar; — die höchstmögliche **tägliche** Ausgabensumme ist Monatsgehalt geteilt durch die „Anzahl der Tage im Monat" [**beachte**: Die täglich zur Verfügung stehende Summe ist abhängig von der Anzahl der Tage im Monat — im Februar, dem kürzesten Monat, ist sie also am höchsten, in den Monaten mit 31 Tagen ist sie am niedrigsten!] — mathematisch ausgedrückt: $\frac{\text{Gehalt}}{\text{Tage im Monat}}$. Am **1.** des Monats steht das **gesamte Gehalt** zur Verfügung, deswegen müssen wir vom „Tag im Monat" [„Datum" wäre nicht exakt genug ausgedrückt, mathematisch exakt muss es „Tag im Monat" heißen, da uns hier nur der „Tagesanteil" des gesamten Datums (das ja aus „Tag", „Monat" und „Jahr" besteht !) interessiert!] **1** abziehen.

Stimmt unsere Funktionsformel? Machen wir die Probe:

Wir setzen für „Tag im Monat" den Ersten des Monats, also 1 ein:

$$\text{Monatsgehalt} - ((\text{Tag im Monat} - 1) \cdot \frac{\text{Gehalt}}{\text{Tage im Monat}}) = 1\,200 - ((1-1) \cdot \frac{1200}{30} =$$

$1\,200 - ((0) \cdot 40 = 1\,200 = 1\,200$ (am **Ersten** steht uns das **gesamte** Gehalt zur Verfügung !)

Probieren wir es mit dem **zweiten** des Monats:

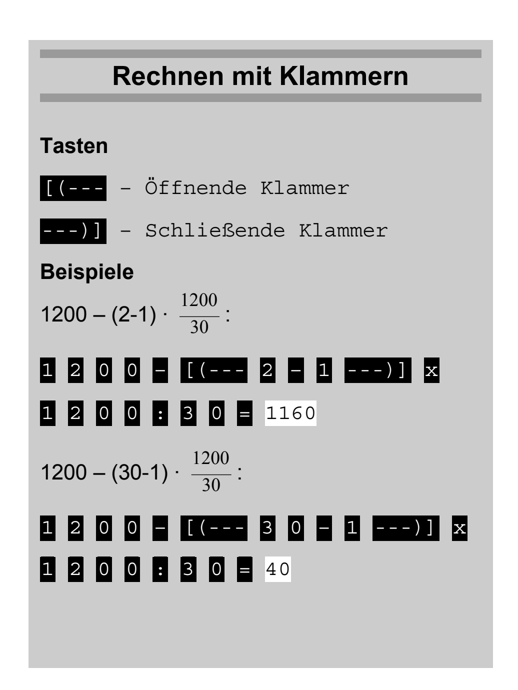
$$1\,200 - ((2-1) \cdot \frac{1200}{30} = 1\,200 - ((1) \cdot 40 = 1\,160.$$

Unsere Formel stimmt offensichtlich. Zur Sicherheit überprüfen wir noch den letztmöglichen Fall — den „**letzten Grenzfall**" also:

$$1\,200 - ((30-1) \cdot \frac{1200}{30} = 1\,200 - (29 \cdot 40) = 1\,200 - 1\,160 = 40.$$

Gewonnen ! Am **Morgen** des letzten Tages im Monat (in unserem Fall also des 30.) stehen unserem „kleinen Angestellten" noch genau DM 40 zur Verfügung !





Weiter: Der Stand der Quecksilbersäule an unserem schon so oft erwähnten Thermometer ist eine Funktion der Temperatur, der Stand an unserem Stromzähler und die an jedem Ablesetermin zu bezahlende Summe für verbrauchten Strom ist eine Funktion der Anzahl der in Gebrauch gewesenen Elektrogeräte **und** deren Brenndauer — womit wir sogar schon eine Funktion kennengelernt haben, bei der eine abhängige Variable von **zwei** unabhängigen Variablen bestimmt wird.

Die **Helligkeit**, die eine Lichtquelle auszustrahlen scheint, ist eine Funktion ihrer eigenen Leuchtkraft **und** der Entfernung, die Höchstgeschwindigkeit eines Kraftfahrzeugs ist die Funktion aus der Höchstleistung seines Motors, der Belastung und den Fahrtwiderständen — sogar drei Unabhängige haben wir hier!

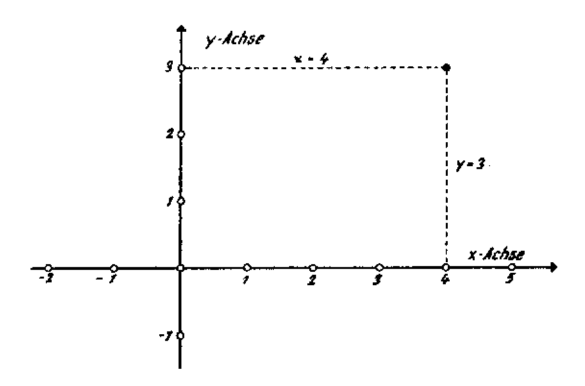
Kurz: Was immer wir im Leben, im Geschehen der Welt betrachten — fast immer wird sich „Ursache und Wirkung“, also das Aufstellen einer „Funktion“, ermöglichen lassen, wenn sich die Funktion auch naturgemäß nur in Ausnahmefällen mathematisch klar herauslösen läßt. Denn die eigentlichen Funktionen sind nur allzu oft — man denke an unser Monatsgehaltsbeispiel — durch allerlei unberechenbare Faktoren, ja durch eigene „Störungsfunktionen“ getrübt.

Und jetzt stellen wir die auf den ersten Blick sonderbar klingende Frage, ob wir denn unsere Beziehung mit den zwei Veränderlichen, richtiger gesagt: unsere Funktion, nicht auch **zeichnen** können, und was dabei — falls es gehen sollte — herauskommen mag. Denken wir aber genauer nach, so kommen wir unschwer darauf, dass die ganze Zeichnerei kein Hexenkunststück sein kann. Das notwendige geistige und praktische Rüstzeug dazu kennen wir ja schon. Unser bei der Darstellung der Winkelfunktionen bewährtes Koordinatensystem wird uns hier nicht im Stich lassen; außerdem haben wir durch die Aufzeichnung und Darstellung der Sinus- und Kosinuslinien und so fort schon einige Übung im Wiedergeben mathematischer Beziehungen. Wir frischen also unser Wissen von den Koordinaten — nichts anderes als zwei gekreuzte Thermometerskalen — hier auf und gehen ans Werk. Zunächst mit einer einfachen Aufgabe.

Wir hätten etwa zwei Angaben, $x = 4$, $y = 3$; den dazugehörigen Punkt finden wir auf folgende Weise:

Wir schreiten von unserem Null- und Kreuzungspunkt nach rechts bis zum Teilstrich 4, von dort 3 Striche in die Höhe und erhalten damit in der Fläche jenen Punkt, dessen x (Abstand in der Waagerechten vom Nullpunkt) auf unserer Skala 4 entspricht, wogegen dessen Abstand über der Waagerechten, also in senkrechter Richtung, einem y von 3 gleichkommt.

Der besseren Vorstellung halber sei noch daran erinnert, dass wir durch unser einfaches Achsenkreuz eine Ebene in vier Flächen geteilt haben, in die uns schon bekannten vier **Quadranten**. Sie sind, wie man ohne weiteres sieht, durch eine merkwürdige Beziehung der



Ein Punkt im Koordinatensystem

in ihnen möglichen x und y gekennzeichnet. Im ersten Quadranten sind x und y positiv, im zweiten Quadranten, der zwar auch „oben“ liegt, ist dementsprechend y positiv, x aber negativ. Anders aber wird das im dritten Quadranten. Hier ist jedes x und y negativ; im vierten Quadranten wird wieder x positiv, während y negativ ist.

So viel zur Wiederholung. Jetzt aber zu unserer Aufgabe, das Bild der Funktion $y = 3x + 5$ zu zeichnen.

Hierzu knüpfen wir wieder an unsere Wertetafel an:

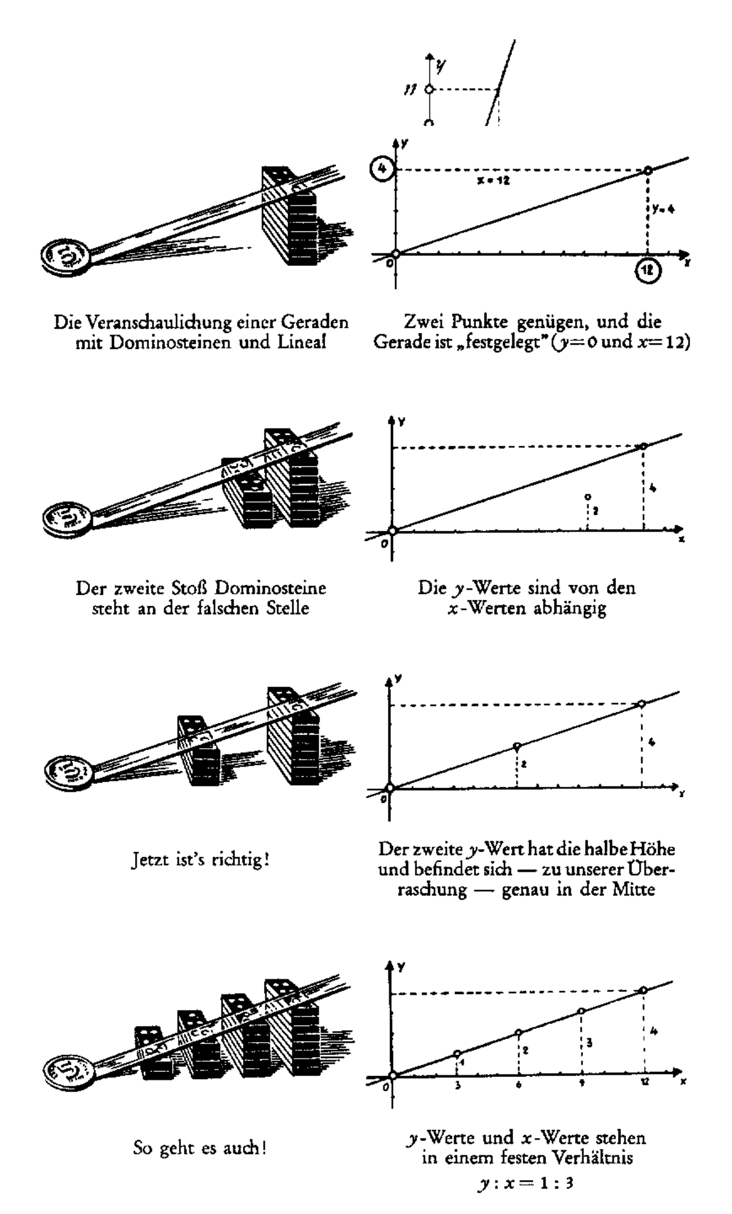
$x =$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	...
$y =$	-4	-1	$+2$	$+5$	$+8$	$+11$	$+14$	$+17$	...

Jedes zusammengehörige Paar der x- und y-Werte kann als Punkt in unserem Koordinatensystem dargestellt werden. Zeichnen wir die Punkte ein, so bemerken wir eine verblüffende Tatsache: Alle Punkte liegen nämlich keineswegs wirr in unseren Quadranten durcheinander, sondern sind genau so angeordnet, dass man eine **Gerade** durch sie ziehen kann. Auch beim Durchgehen durch den Nullwert, also an der Grenze zwischen Negativ und Positiv, gibt es keinen Knick — schnurgerade zieht die Gerade durch alle Punkte; und wenn wir zu beliebig gewählten x-Werten im Negativen oder Positiven die y-Werte dazurechnen, kommen wir bald darauf, dass die Gerade in **alle Unendlichkeit** gerade bleibt.

Wir müssen also — wohl mit einiger Überraschung — feststellen:



Das Bild der Gleichung (oder Funktion) $y = 3\,x + 5$ ist eine **Gerade**.



Die Veranschaulichung einer Geraden mit Dominosteinen und Lineal

Zwei Punkte genügen, und die Gerade ist „festgelegt" ($y = 0$ und $x = 12$)

Der zweite Stoß Dominosteine steht an der falschen Stelle

Die y-Werte sind von den x-Werten abhängig

Jetzt ist's richtig!

Der zweite y-Wert hat die halbe Höhe und befindet sich — zu unserer Überraschung — genau in der Mitte

So geht es auch!

y-Werte und x-Werte stehen in einem festen Verhältnis $y : x = 1 : 3$

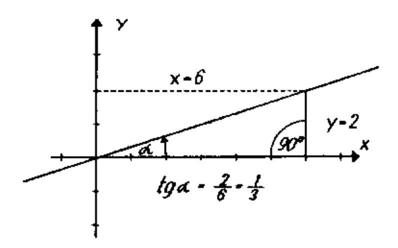
Und unsere Verblüffung wird wahrscheinlich noch steigen, wenn wir uns eine andere Zahlenbeziehung beliebig ausdenken, etwa wie die: $y = 14 - 2\,x$. Auch das ergibt eine Gerade, ebenso wie die schon etwas verwickeltere Beziehung $y = \frac{34}{35}x - 4018{,}4$ gleichfalls eine Gerade ergibt!

Versuchen wir einmal, die ganze Geschichte anschaulich darzustellen. Man benötigt dazu nur ein Domino-Spiel, ein Lineal und weiter nichts als etwas Phantasie. — Doch lassen wir, ohne viele Worte, so ein Experiment bildlich vor uns ablaufen.

Nach unserem mathematischen Wissen ist die Geschichte so zu erklären: Die Entfernungen der Dominosteine und ihre Höhen müssen ein bestimmtes Verhältnis haben, also jede Höhe, jedes y, ist gleich einem x, das immer mit einer bestimmten Zahl multipliziert werden muss.

In unserem Beispiel sind die y-Werte immer genau ein Drittel der zugehörigen x-Werte. Wir können also die Gleichung der Geraden sofort angeben: $y = \frac{1}{3}x$. Unsere zunächst so primitiv erscheinende Spielerei mit den Dominosteinen hat uns einen beachtlichen Schritt weitergebracht. Wir sind dem Wesen der Geraden auf die Spur gekommen.

Von einer Merkwürdigkeit der Geraden[1)] $y = \frac{1}{3}x$ müssen wir noch sprechen. Sie geht — im Unterschied zur Geraden $y = 3\,x + 5$, die wir einleitend kennengelernt haben — durch den Nullpunkt, durch den Mittelpunkt unseres Koordinatensystems. — Warum, ist wohl klar. Denn wir haben bei unserer so denkbar einfachen Gleichung $y = \frac{1}{3}x$ keine zu addierende oder zu subtrahierende Zahl. Mit $x = 0$ wird auch sofort $y = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$.



Herr Tangens und die Gerade

Die Gerade $y = \frac{1}{3}x + 1$ geht dagegen bestimmt nicht durch den Nullpunkt, sondern schneidet die y-Achse an den Stellen, wo $x = 0$ ist und y den Wert von 1 aufweist. Aber das ist noch die kleinste Entdeckung, die wir gemacht haben. Eine solche von unübersehbarer Tragweite, die uns mitten in das Herz der höheren Mathematik führt, liegt hier klar und einfach vor uns. Wir stellen nämlich die berechtigte Frage, worauf es eigentlich ankomme, dass die Gerade einer Funktion mehr oder weniger steil ansteige.

All die unendlich vielen Punkte unserer Geraden $y = \frac{1}{3}x$, von der unser Lineal ja nur ein Stück, eine (begrenzte) **Strecke** darstellen konnte, gehorchen ein und demselben Befehl: Jeder y-Wert ist genau $\frac{1}{3}$ des zugehörigen x-Wertes. Mit anderen Worten, das x ist immer 3mal so lang wie das y. Dafür kann man aber auch sagen, das y verhält sich zu dem x wie 1 zu 3. — Und jetzt merken wir langsam, dass unser Herr Tangens auch mit von der Partie ist. Aus der Abbildung erkennen wir, dass unser $y : x$ weiter nichts ist, als das Seitenverhältnis Gegenkathete zu Ankathete in dem eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck mit dem Winkel α. Damit tritt die ganze Angelegenheit in den Zuständigkeitsbereich von Herrn Tangens und es ist

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{1}{3}.$$

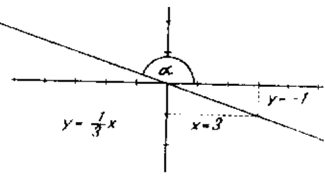
Nun ist aber leicht einzusehen, dass Herr Tangens auch für die Steigung der Geraden verantwortlich ist. Es ist genauso, wie bei der Steigung einer Eisenbahnstrecke, mit der wir uns ja schon beschäftigt haben. — Natürlich kann man auch hier den Winkel angeben, unter

[1)] Wir sprechen hier von der Geraden $y = \frac{1}{3}x$, genauer müsste es natürlich heißen „Gerade, deren Funktionsgleichung $y = \frac{1}{3}x$ ist“. Im Folgenden wollen wir aber vorwiegend die abgekürzte Sprechweise benutzen; wir wissen ja, was gemeint ist !

dem die Gerade ansteigt. $\frac{1}{3}$ ist soviel wie 0,333 333 333; für diesen Wert ermitteln wir den Winkel α = 18° 26′5,82′′. In den meisten Fällen ist es aber gar nicht nötig, den Winkel α, den sogenannten **Steigungswinkel** auszurechnen. Im allgemeinen genügt der Faktor vor dem x — Steigungsfaktor genannt —, in unserem Fall also dieses $\frac{1}{3}$, um die Steigung zu beurteilen. Wenn wir z. B. drei Einheiten auf der x-Achse weitergehen, so sind wir mit dem y-Wert erst um eine Einheit gestiegen. Das können wir uns besser vorstellen als die Feststellung, unter einem Winkel von 18°, 26′ und 5,82′′ angestiegen zu sein. — Genauso klar ist nun auch, dass der Steigungsfaktor größer ist, wenn die Gerade steiler ansteigt. Haben wir eine andere Gerade, z. B. $y = x$, dann ist der Steigungsfaktor vor dem x genau 1. Für den Steigungswinkel gilt also tg α = 1, was so viel bedeutet, wie α ist gleich 45°. Diese Gerade ist also schon sehr viel steiler. Ein Schritt auf der x-Achse bringt uns stets um genau dasselbe Stück höher. Je größer wir den Steigungsfaktor wählen um so steiler wird unsere Gerade.

Der Zahlenfaktor vor dem x kann übrigens auch negativ sein, z. B. $y = -x$. Und jetzt erleben wir die Merkwürdigkeit, dass die Gerade gar nicht mehr ansteigt, sie fällt. Gehen wir auf dem positiven Teil der x-Achse um einen Schritt weiter, dann sind wir mit unserem y-Wert schon um denselben Schritt abgesunken. Mit jedem Schritt geht es tiefer ins Negative. Wir rutschen glattweg ab! Nicht anders geht es uns mit der Geraden $y = -\frac{1}{3}x$. Und so erleben wir die Überraschung, dass das Vorzeichen Minus uns das Fallen der Geraden anzeigt.

Noch eine kleine Bemerkung. — Auch bei der fallenden Geraden wird der Winkel α im gleichen Sinne angegeben, wie bei der steigenden Geraden. Das heißt, der Steigungswinkel — wir behalten diese Bezeichnung für alle überhaupt möglichen Geraden bei —, ist immer derjenige Winkel, den die positive x-Achse mit dem **über** ihr befindlichen Teil der Geraden bildet. Das Aussprechen dieser Tatsache ist eigentlich das Schwierigste dabei, und der Leser wird sich sicher bald daran gewöhnt haben. Es wird also offensichtlich, dass bei einer fallenden Geraden der Steigungswinkel größer als 90° ist. Das alles ist aber gar nicht so wichtig! Entscheidend ist vielmehr, dass der Steigungsfaktor ein Minuszeichen hat, wenn die Gerade fällt



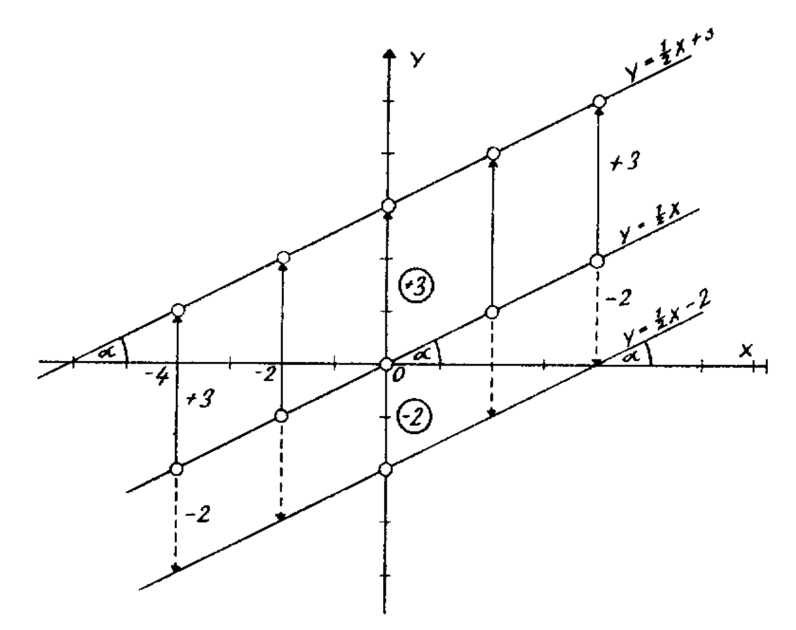
Die fallende Gerade

Doch so schnell geben wir uns noch nicht zufrieden; irgend etwas ist da noch, was in unseren Überlegungen nicht so ganz in Ordnung zu sein scheint: Wo ist denn unser sympathischer Herr Tangens geblieben? Keine Angst, auch hier ist er wieder dabei. So gilt für unsere Fallende Gerade $y = -x$ ebenfalls

$$\text{tg}\,\alpha = -1.$$

Der dazugehörige Winkel ist α = 180° – 45° = 135°. Das folgt übrigens auch aus dem äußerst vielseitigen Einheitskreis. Man braucht dazu nur den Winkel α über 90° hinausgehen zu lassen und die entsprechenden Werte auf der nach **unten** verlängerten Tangente abzulesen.

Wir wollen auf diese tiefergehenden Zusammenhänge aber nicht weiter eingehen. Und wenn der Leser bei diesen Andeutungen nur mir „halbem Ohr“ dabei war, dann schadet das auch nichts!



Parallele Geraden im Koordinatensystem

Was wird nun aber aus den so übersichtlichen Steigungsverhältnissen, wenn wir die Geraden betrachten, die nicht mehr durch den Nullpunkt gehen, wie z. B. $y = \frac{1}{2}x + 3$? — Hier können wir nun die erfreuliche Tatsache vermerken, dass die zu addierenden bzw. zu subtrahierenden Zahlen auf die Steigung der Geraden überhaupt keinen Einfluss ausüben. Der Faktor vor dem x gibt nach wie vor in jedem Fall die Steigung der Geraden an. Die Zahlen können so groß sein, wie sie wollen, Herr Tangens lässt sich dadurch nicht aus der Fassung bringen, er hält die Geraden fest in der Hand. Wie kommt das aber? Die Antwort ist leicht gefunden, wenn wir uns den Sachverhalt aufzeichnen.

Wir erkennen sofort, dass die eingezeichneten Geraden parallel sind. Die Zusammenhänge können wir uns so vorstellen, dass die ganze Gerade $y = \frac{1}{2}x$ um 3 Einheiten nach oben verschoben worden ist, wobei jeder y-Wert um die bewusste zu addierende Zahl 3 verlängert wird. Die Gerade ändert dabei ihre Steigung — ihre Richtung — nicht im geringsten. Genauso können wir auch von allen y-Werten den gleichen Wert, z. B. 2, abziehen. Die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ wird dann ganz entsprechend nach unten verschoben. Ihre Gleichung lautet dann natürlich $y = \frac{1}{2}x - 2$. Nun sind wir aber zu einer beinahe aufregenden Erkenntnis geführt worden. Aus der Gleichung allein können wir uns, ohne großartige Überlegungen anstellen zu müssen, sofort ein Bild der Geraden machen. Wir brauchen nicht einmal Bleistift und Papier dazu! Der Faktor vor dem x gibt uns sofort an, wie die Gerade verläuft. Sie steigt, wenn der Faktor positiv ist und sie fällt, wenn ein Minuszeichen davorsteht. Ist der Faktor groß, ist er klein, wir wissen gleich, wie steil bzw. wie weniger steil der Anstieg oder das Fallen ist. Und zu allem Überfluss verraten uns die zu addierenden oder zu subtrahierenden Zahlen, die — unabhängig von dem x — der Gleichung zugefügt werden, wo die Gerade die y-Achse schneidet. Vielleicht ist das bei unseren bisherigen Betrachtungen noch nicht so ganz klar geworden. Der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse ist doch dadurch gekennzeichnet, dass der x-Wert dann gerade Null ist. Für den y-Wert ist also in diesem Fall allein die von x unabhängige Zahl verantwortlich.

Übrigens gilt das alles auch, wenn der Faktor vor dem x Null ist. Damit verschwindet aber auch das x aus unserer Gleichung und übrig bleiben z. B.

$$x = 2; \quad x = -1; \quad x = 6\frac{1}{2}.$$

Diese Geraden haben weder eine Steigung, noch fallen sie. Der Einfluss von Herrn Tangens ist einfach nicht mehr vorhanden. Die Zahl auf der rechten Seite der Gleichung gibt natürlich nach wie vor an, wo diese Geraden die y-Achse schneiden. So erkennen wir, dass $y = 0$ die Gleichung unserer x-Achse (die ja auch eine Gerade ist), darstellt, während $y = +3$ und $y = -2$ die Gleichungen von parallelen Geraden — kurz Parallelen genannt — zur x-Achse sind.

Die naheliegende Frage nach den Parallelen zur y-Achse ist nicht ganz so einfach zu beantworten. Wir wissen schon, dass der Steigungswinkel α in diesen Fällen 90° beträgt. Ja, und da bereitet uns Herr Tangens arge Schwierigkeiten; er benimmt sich völlig unmöglich! — Und so ohne weiteres lässt sich Herr Tangens hier nicht abschieben; diesmal ist es das y, das dran glauben muss. Übrig bleiben das x und ein Zahlenwert. So sind z. B.

$$x = 2; \quad x = -1; \quad x = 6\frac{1}{2}$$

Gleichungen der Parallelen zur y-Achse und $x = 0$ die Gleichung der y-Achse selbst. Die Zahlen geben allerdings nunmehr die Schnittpunkte mit der x-Achse an.

Das alles ist sehr übersichtlich und daher auch verhältnismäßig leicht einzusehen. Um so mehr wird der Leser überrascht sein, wenn er erfährt, dass diese einfache Funktion für den Naturwissenschaftler und für den Techniker besondere Bedeutung hat. — So ist z. B. der Weg, den ein Eisenbahnzug zurücklegt, eine lineare Funktion der Zeit, so lange er mit gleichmäßiger Geschwindigkeit fährt. Ein D-Zug, der mit einer Geschwindigkeit von 80 km in der Stunde dahinbraust, legt in x Stunden $y = 80\,x$ Kilometer zurück. Beispielsweise ist er in einer halben Stunde (also $x = \frac{1}{2}$) um $y = 80 \cdot \frac{1}{2} = 40$ Kilometer weiter gefahren. Dieses Beispiel ist uns natürlich längst geläufig! Wie oft haben wir schon in einem Zug gesessen und uns überlegt, wie lange es wohl dauern wird, bis wir den Zielbahnhof erreichen. Neu ist für uns nur, dass man all das auch mathematisch genau formulieren kann. Und wenn wir uns diese Zusammenhänge so recht klarmachen, dann müssen wir wohl zu dem Schluss kommen, dass all die Vorurteile, mit denen man gemeinhin der Mathematik entgegentritt, gelegentlich doch sehr übertrieben sind.

Also noch einmal: Nicht von Bezeichnungen und neuen Begriffen abschrecken lassen! Oft steckt gar nicht viel mehr dahinter, als wir bereits wissen. Die schärferen Formulierungen haben aber dennoch ihren guten Sinn. Sie helfen uns nämlich auch dann weiter, wenn wir mit unserem gewöhnlichen „Latein“ längst am Ende sind.



Herr Tangens öffnet die Tür zur Differentialrechnung

Von der linearen Funktion und ihrem geometrischen Bild der Geraden ist es nur ein kleiner Schritt zu all den vielen Funktionen, die das Geschehen in unserer Welt beeinflussen. Diese Funktionen zu untersuchen bzw. zu analysieren, ist eine der wichtigsten Aufgaben der Mathematik. Ob es sich nun um das Spiel eines Motors, um die Belastung einer Brücke oder um die Bewegung unserer Erde handelt, ob wir technische, physikalische, chemische, biologische oder sonst irgendwelche Vorgänge betrachten, immer geht es dabei um die Beziehungen einzelner oder mehrerer Größen, die in einer wohlbestimmten Abhängigkeit zueinander stehen. Natürlich sind diese Funktionen sehr viel verwickelter als unsere primitive lineare Funktion. In den meisten Fällen gelingt es nicht einmal, die Art der Funktion so anzugeben, dass man sie in Form einer Gleichung niederschreiben kann. Bei den Funktionen aber, deren Gleichung wir kennen und deren Bild wir also nach Aufstellung einer Wertetafel zeichnen können, ist es genauso wie bei unserer Geraden. Man untersucht ihr Steigen, ihr Fallen, ihre Schnittpunkte mit den Achsen und so fort.

Damit sind wir mit unserer biederen Geraden in den Teil des Zaubergartens vorgedrungen, in dem eigentlich bereits die sogenannte höhere Mathematik beginnt.

Doch unser Interesse ist geweckt und so wollen wir mutig noch etwas weitergehen. Und wenn wir uns an die bequemen, sorgfältig angelegten Wege halten, dann werden wir uns kaum in unübersichtlichem Gestrüpp verrennen.

Zunächst wollen wir einmal eine ganz andere, verwickeltere Art von Funktionen kennen lernen, nämlich solche, bei denen auch **Potenzen** eine Rolle spielen.

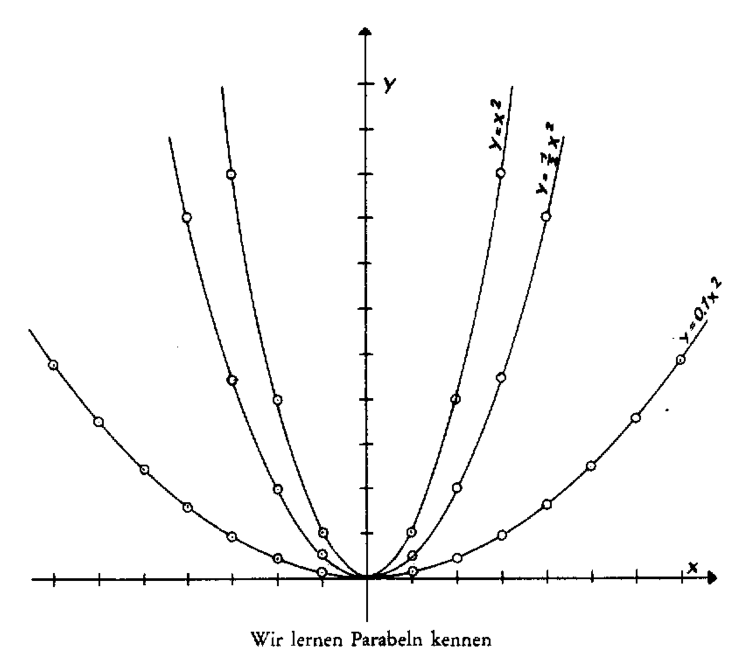
Wir wollen vom einfachsten Fall ausgehen und die Funktion

$$y = x^2$$

näher betrachten. Die Sache sieht, wie wir schon auf den ersten Blick erkennen, etwas anders aus. Denn die y-Werte wachsen jetzt mit einfach zunehmendem x ganz erheblich. Schreiben wir uns das einmal auf, indem wir die zusammengehörigen Werte untereinander stellen. Es ergibt sich folgende Wertetafel:

$x =$	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	...
$y =$	$+4$	$+1$	0	$+1$	$+4$	$+9$	$+16$	$+25$	$+36$	...

Bevor wir das aufzeichnen, ist es vielleicht gut, noch einige Zwischenwerte auszurechnen,



Wir lernen Parabeln kennen

etwa für x gleich $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$. Nun tragen wir die zu jedem x gehörigen Werte etwa auf einem quadratierten Papier oder sogenannten Millimeterpapier auf. Überraschung! Es ist uns **unmöglich**, durch die einzelnen Punkte eine beliebig gelegene Gerade zu ziehen! Verbinden wir vielmehr alle vorhandenen Punkte miteinander, so stellt sich heraus, dass wir es mit einer steil nach aufwärts strebenden **krummen** Linie, einer sogenannten **Kurve**, zu tun haben. Wir werden stutzig und wiederholen den Versuch, wobei wir, um mit den y-Werten nicht gar so rasch in unbequeme Höhen zu kommen, folgende Gleichung untersuchen:

$$y = \frac{1}{2}x.$$

Wieder dasselbe! Die Kurve verläuft jetzt zwar nicht so steil, aber sie **bleibt** eine **Kurve**, auch dann noch, wenn wir etwa

$$y = 0{,}1\,x^2$$

untersuchen. Immer wieder eine Kurve! Und tatsächlich,: Sowie eine Veränderliche in irgendeiner **Potenz**, also im Quadrat oder in der dritten, vierten, fünften Potenz vorkommt oder aber unter irgendeinem Wurzelzeichen gestellt erscheint, ist das Bild dieser Funktion nicht mehr eine Gerade, sondern eine irgendwie **regelmäßig gekrümmte Linie**.

Jetzt sieht die Sache allerdings erschreckend aus !

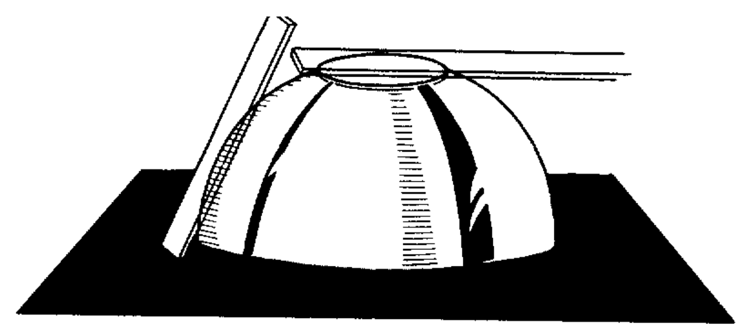
Wir wissen zwar schon eine Menge, doch ist auf den ersten Blick klar, dass die an unseren einfachen Geraden, den Bildern linearer Funktionen, gewonnenen Gesetze nicht so ohne weiteres auf die Kurven anwendbar sein werden.

Bei einer Geraden sprachen wir von einer Steigung, die von der Geraden in die Unendlichkeit hin gleichmäßig eingehalten wird. Wie ist das aber mit der Kurve? Wo und wie findet man da die Steigung? Kann man hier überhaupt von einer Steigung reden?

Da alle rein gezeichnet gedachten geometrischen Vorstellungen leicht zu blass und beziehungslos erscheinen, flüchten wir ins Körperliche. Eine umgestülpte etwa halbkugelförmige Puddingschüssel stellen wir uns meinetwegen als Miniaturmodell irgendeines seltsam regelmäßig geratenen Berges vor. Es ist nun ohne weiteres klar, dass wir hier von Steigungen sprechen können. Ein Bergsteiger etwa, der diesen Berg besteigen wollte, hätte im Anfang erhebliche Schwierigkeiten: Senkrecht vor ihm steigt aus der Ebene eine „Wand" auf. Besser wird die Sache, je höher er kommt. Es geht da zwar auch noch bergauf, aber doch nicht mehr so unbarmherzig senkrecht wie vorhin. Ganz oben schließlich mündet der „Berg" in ein ebenes Hochplateau, das also waagerecht liegt und keine Steigung mehr aufweist.

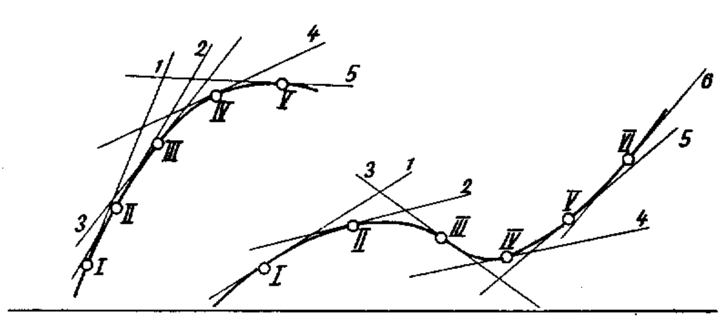
Es ist keine Kunst, an diesem Gebilde die Steigung anzugeben. Man braucht einfach nur unser schon mehrfach bewährtes Lineal anzulegen, und man sieht, wie „steil" es in die Höhe geht.

Unschwer erkennen wir auch, dass sich die Steigung „Schritt für Schritt" ändert. Und wenn wir die Schritte noch so klein wählen, immer ändert sich auch die Steigung. jeder Punkt hat also eine andere Steigung.



Die „Steigung" einer Puddingschüssel

Dort, wo unser Modell auf der Grundebene aufliegt, ist die Steigung zuerst ganz steil und führt senkrecht empor. Aber schon im nächsten Punkt ist sie weniger steil geworden und nimmt dann ununterbrochen und allmählich ab, bis sie oben Null wird. Durch Anlegen des Lineals können wir alles sofort praktisch ausprobieren! Und der Winkel, den das Lineal mit der Grundebene einschließt, gibt die Steigung an, die wir für den betreffenden Punkt, wie bisher in Winkelgraden oder durch den Tangens ausdrücken können. Ganz entsprechend können wir uns das Fallen, also das „Bergabsteigen" vorstellen.



Die Steigung von Kurven in der Ebene

Jetzt kehren wir vom Körperlichen aufs Papier, aufs Reißbrett in die Ebene zurück. Von der Puddingschüssel bleiben dann nur die Umrisse übrig, die auf dem Papier als eine gekrümmte Linie erscheinen. Aus unserem Lineal wird eine die Kurve berührende Gerade, also eine Tangente. Der Steigungsfaktor dieser **Tangente** gibt uns die an dem betreffenden Punkt vorliegende **Steigung** an. Jede Kurvenuntersuchung besteht also in ihrem wesentlichen Teil darin, die Steigung der Kurve in allen ihren Punkten anzugeben. — Damit wir uns auch gleich fachgerecht verständigen können, noch einige Bezeichnungen vorweg. Man nennt den Tangens des Steigungswinkels der Tangente, die zu einem Kurvenpunkt der Funktion $y = f(x)$ gehört, den Differentialquotienten y' (sprich: „Ypsilon-Strich") oder, ganz kurz ausgedrückt:

Differentialquotient (y') = Steigungsfaktor (tg α)

Differenzieren (der Rechenbefehl für das Suchen des Differentialquotienten) heißt also nichts weiter, als die Steigungsfaktoren der Funktion (genauer der Funktionskurve, also des Bildes der Funktion) zu bestimmen.

Und jetzt wissen wir auch schon, wo wir bei unserer Überlegung herauskommen werden, was der eigentliche und grundlegende Unterschied zwischen einer Kurve und einer Geraden ist.

Bei der Geraden herrscht überall an jedem beliebigen ihrer Punkte dieselbe Steigung.

Die Gerade hat also für alle ihre Punkte denselben Differentialquotienten. So ergibt sich z. B. aus der Funktion $y = 3\ x - 2$ der Differentialquotient $y = 3$. Mit anderen Worten die Steigung hängt gar nicht davon ab, welche Stelle der Geraden bzw. welchen Punkt der Geraden wir betrachten. Ganz anders bei der **Kurve** : **Hier ändert sich die Steigung ununterbrochen von Punkt zu Punkt, daher muss auch der Differentialquotient an jedem Punkt der Kurve einen anderen Wert haben.**

Es ist ohne weiteres klar, dass wir zuallererst versuchen müssen, diesen sonderbaren veränderlichen Differentialquotienten kennen zu lernen. Natürlich dürfen wir dabei nicht von irgendeiner verzwickten Kurve ausgehen. Dort, wo die Geschichte von Haus aus verwickelt sein dürfte, werden wir Anfänger mit unserem tastenden Hin und Her von vornherein nicht viel Glück haben. Wir müssen also auf eine möglichst einfache Kurve zurückgreifen, und zwar nehmen wir uns eine Kurve vor, deren Gleichung so einfach ist wie kaum eine andere, nämlich die Kurve, die entsteht, wenn man die Gleichung oder Funktion $y = x^2$ aufzeichnet. Diese Kurve — die wir ja übrigens schon flüchtig kennen — hat auch einen Namen; es ist die **Appolonische Parabel**. Da, wie wir schon wissen, die Kurve sehr steil in die Höhe steigt, wählen wir für unsere Betrachtungen die „sanfter“ ansteigende Kurve $y = \frac{1}{4}x^2$. Aus der Wertetafel

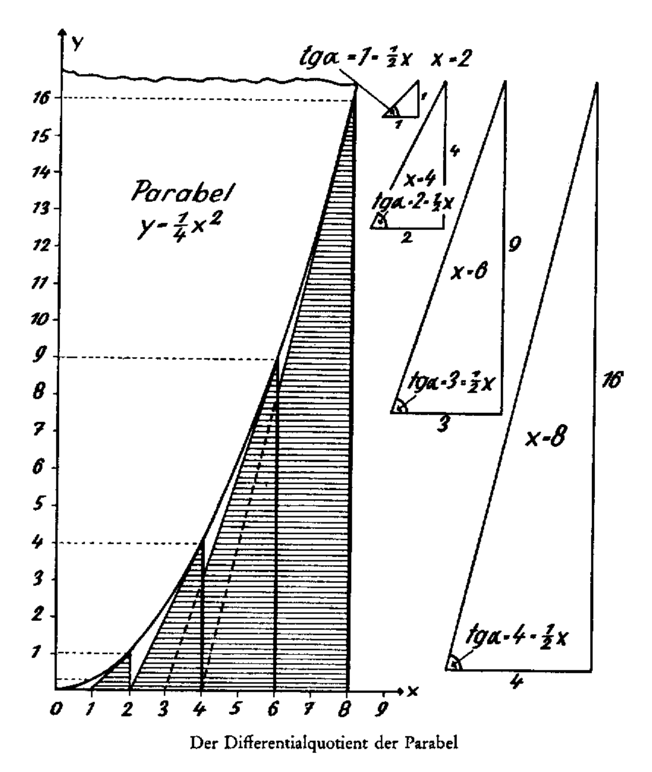
$x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$y =$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9	$12\frac{1}{4}$	16	...

entnehmen wir für den Teil der Kurve, der uns interessiert (die Kurve geht ja auch noch entlang der negativen x-Achse weiter) die Koordinaten der Punkte, und leicht ist die Kurve durch sie zu ziehen.

Nun versuchen wir in den Punkten, die den x-Werten 2; 4; 6 und 8 entsprechen, .Tangenten an die entstandene Kurve zu ziehen. Haben wir nur einigermaßen richtig gezeichnet, so kann uns eine ganz verblüffende Erscheinung nicht entgehen. Jede Tangente bildet nämlich mit der zu dem x-Wert auf der x-Achse gezogenen Senkrechten immer rechtwinklige Dreiecke. Ja, das erste und kleinste der so entstandenen Dreiecke, nämlich jenes, das seine höchste Spitze im Punkt $y = 1$ und $x = 2$ hat, in unserer Zeichnung ganz oben herausgezeichnet, ist sogar ein gleichschenkliges Dreieck von 45-Grad-Winkeln. Das zweite, rechts daneben, ist jedoch ein solches, bei dem sich die längere kleinere Seite zur kürzeren wie 2 :1 verhält. Nicht ganz so klar sind die Verhältnisse bei den folgenden immer größer und schmäler werdenden Dreiecken. Auch bei ihnen fällt auf, dass die Tangenten aus den Punkten über $x = 6$ und $x = 8$ auf ganze Zahlen auf der x-Achse hinzielen.

Wir sehen uns nun diese Dreiecke einzeln an. Ihre Gestalt — sie werden immer länger, höher und schlanker — kümmert uns wenig; wir wollen ja nur das Wichtigste wissen, was sie verraten können, nämlich den Steigungswinkel der Kurve, den sie tatsächlich in dem Verhältnis ihrer beiden kürzeren Seiten anzeigen müssen. Denn der Quotient aus der senkrechten Seite der Dreiecke (= y) dividiert durch die Waagerechte — das ist das betreffende Stück auf der x-Achse — muss ja den Differentialquotienten ergeben. Das Verhältnis, der Quotient dieser beiden Seitenlängen, ist der gesuchte Tangens des Winkels α,

1. Dreieck	hoch 1 breit 1	tg α = 1 : 1 = 1 (= Differentialquotient)
2. Dreieck	hoch 4 breit 2	tg α = 4 : 2 = 2 (= Differentialquotient)
3. Dreieck	hoch 9 breit 3	tg α = 9 : 3 = 3 (= Differentialquotient)
4. Dreieck	hoch 16 breit 4	tg α = 16 : 4 = 4 (= Differentialquotient)



Der Differentialquotient der Parabel

unter dem die Tangente aufsteigt. Also zählen wir es ab und dividieren wir gleich den Tangenswert heraus[1]:

Daraus ersehen wir schon: Der Tangens des Winkels, den die Tangente mit der waagerechten x-Achse einschließt, das heißt der Differentialquotient y', hat den Wert

$$y' = 1 \text{ wenn } x = 2 \text{ ist}$$
$$y' = 2 \text{ wenn } x = 4 \text{ ist}$$
$$y' = 3 \text{ wenn } x = 6 \text{ ist}$$
$$y' = 4 \text{ wenn } x = 8 \text{ ist}$$

[1] Hier ist genau zu unterscheiden zwischen: **die** Tangente, das ist die berührende Linie, und zwischen: **der** Tangens (tg), das ist das Verhältnis der beiden kürzeren Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck.

Das kann kein Zufall sein! Rechnerisch ist die Beziehung rasch aufgezeigt. Warum der Differentialquotient hier immer wachsen muss, ist klar; ebenso aber auch, dass er irgendwie von x abhängig ist. Da jeder Wert des Differentialquotienten **halb so groß ist wie das dazugehörige *x***, so finden wir die Beziehung:

Die Funktion $y = \frac{1}{4}x^2$ ergibt differenziert $y' = \frac{1}{2}x$.

Nun ist es Zeit, dem Leser die Grundformel der Differentialrechnung zu verraten. Sie kann auf verhältnismäßig einfache Weise exakt abgeleitet werden; aber wir wollen die Formel lieber gleich angeben.

Bei einer Funktion käme zum Beispiel x mit dem Wert a multipliziert vor. Ebenso steht x in der, sagen wir, n-ten Potenz[1]. Man schreibt das so:

$$y = a \cdot x^{n}$$

Differenziert man diese Funktion, so ist

$$y' = n \cdot a \cdot x^{n-1}$$

Das heißt: Beim Differenzieren bleibt die multiplikative Konstante, in unserem Fall das a, unverändert. Der Exponent — also die kleine Hochzahl von x — kommt herunter und wird mit multipliziert. Dafür wird der Exponent selbst um 1 verringert.

Zunächst überzeugen wir uns noch, dass diese Formel mit unserem Ergebnis für die Parabel $y = \frac{1}{4}x^2$ übereinstimmt. In unserem Beispiel ist also $a = \frac{1}{4}$ und $n = 2$; und damit kommt tatsächlich

$$y' = n \cdot a \cdot x^{n-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^{2-1} = \frac{1}{2}x$$

heraus. Mit der gleichen Formel erfassen wir übrigens auch die lineare Funktion, z. B. $y = -4x$, denn dafür können wir ja auch (wir erinnern uns an unsere Potenzregeln) $y = -4 \cdot x^1$ schreiben. Es ist also

$$y' = 1 \cdot (-4) \cdot x^{1-1} = -4 \cdot x^0 = -4 \cdot 1 = -4.$$

Ebenso ist es mit $y = x^2$. Der kleine Zweier kommt nach vorn, die kleine Zahl über dem x, der Exponent, wird um 1 verringert. Daher ergibt das

$$y' = 2\,x^1 = 2\,x.$$

[1] Wer sich n-te Potenz nicht so recht vorstellen kann, der setze für „n“ einfach einen bestimmten Zahlenwert, z.B. 6 oder 11, ein.

Weiter ergibt z. B.

$$y = 4\,x^{12} \quad \text{differenziert} \quad y' = 48\,x^{11}.$$

Natürlich kann man den erhaltenen Differentialquotienten noch weiter differenzieren. Die Rechenregel bleibt die gleiche. Man nennt den so entstehenden, nochmals differenzierten Differentialquotienten, den **zweiten Differentialquotienten** und bezeichnet ihn mit y'' (sprich „Ypsilon-Zweistrich“). Er gibt — eine ganz einfache Überlegung macht das klar — die **Änderung der Steigung** an. Ebenso kann man einen dritten, vierten, fünften und so fort Differentialquotienten bilden. Allerdings muss das die Funktion, von der man ausgeht, erlauben. Bilden wir z. B. von der linearen Funktion $y = 16\,x$ den ersten und zweiten Differentialquotienten, so ist

$$y' = 16 \quad \text{und} \quad y'' = 0.$$

Das heißt: die Steigung einer Geraden erfährt **keine** Änderung, die Steigungsänderung ist gleich Null!

Anders ist das aber schon mit einer quadratischen oder gar kubischen Funktion. Probieren wir es: Es wäre etwa $y = x^2$, so ist

$$y' = 2x; \quad y'' = 2 \quad \text{und erst} \quad y''' = 0.$$

Weiter ergibt sich für $y = x^3$:

$$y' = 3\,x^2; \quad y“= 6\,x; \quad y''' = 6 \quad \text{und erst}\; y'''' = 0.$$

Der Leser wird vielleicht glauben, wir hätten ihn in ein verstiegenes Randgebiet geführt. Indes liegt die hier aufgedeckte Wahrheit dem Alltäglichen nahe, sogar überraschend nahe! Schreiben wir zum Beispiel alle Quadratzahlen hin, stellen wir die Differenzen auf und davon noch einmal die Differenzen, so ergibt das:

1 4 9 16 25 36
3 5 7 9 11
2 2 2 2 2

und so fort. Das heißt: Bei fortgesetzter Bildung der Differenzen kommt der zweite Differentialquotient heraus.

Ebenso ist es bei den dritten Potenzen:

1 8 27 64 125 216
7 19 37 61 91
12 18 24 30 36
6 6 6 6 6

Hier erscheint der dritte Differentialquotient; entsprechend sind von $y' = x^3$ die Differentialquotienten $y' = 3 \cdot x^2$, ferner $y'' = 6\,x$ und $y''' = 6$.

Und da der vierte Differentialquotient von $y = x^4$ sich so abwickelt: $y' = 4x^3$, $y''= 12\,x^2$, $y''' = 24\,x$ und $y'''' = 24$, so muss bei fortgesetzter Subtraktion der vierten Potenzen und der Zwischendifferenzen zum Schluss 24 herauskommen, genau so wie bei den fünften Potenzen 120 herauskommen muss, weil eben von $y = x^5$ der fünfte Differentialquotient $y'''''' = 120$ ist. So geht das beliebig weiter!

Eins fehlt uns noch bei unserem Vorstoß ins Gebiet der höheren Mathematik: Wir haben immer nur bekannt gemacht, erklärt und Schlüsse gezogen, aber noch nicht gezeigt, **wozu** man alle diese Spitzfindigkeiten und oft abwegig anmutenden Vorstellungen ersonnen hat. Der Vorwurf, wir hätten bisher „l´art pour l´art“ getrieben, nur „Kunst gemacht, um Künstler zu sein“, liegt tatsächlich nahe.

Es ist natürlich nicht im entferntesten möglich, auch nur angenähert davon ein Bild zu malen, wie vielgestaltig die Aufgaben sind, die wir durch diesen Zauberschlüssel der höheren Mathematik überhaupt erst zu lösen imstande sind. Beinahe unser ganzes Weltbild wurde durch die Ausbildung der Differentialrechnung grundlegend umgestaltet, und Verhältnisse, Tatsachen gelang es zu beweisen, von denen man vorher nicht viel mehr als verschwommene Ahnungen hatte. Dafür nur einige besonders einleuchtende Beispiele.

Für einen Marsch bestimmter Länge durch unwegsame Wüste sollen Forscher ausgerüstet werden. Weder Wasser noch Nahrung finden sich unterwegs; beides muss daher mitgenommen werden. Soll man nun viel oder wenig Lebensmittel mitnehmen? Die Frage ist schwer zu beantworten. Denn es stehen einander offenbar zwei Möglichkeiten gegenüber. Einmal die: Jeder Mann nimmt möglichst wenig Gepäck mit, damit er, im Mindestmaß belastet, mit seinen Kräften so weit als möglich kommt. Dieser Leichtbepackte wird jedenfalls sehr weit kommen, da er eine verhältnismäßig hohe Marschgeschwindigkeit mühelos einhalten kann. Die zweite Möglichkeit aber ist die, dem Mann so viel an Lebensmitteln aufzupacken, wie er nur tragen kann. Wohl wird er, durch die größere Last beschwert, nur langsam vorwärtskommen und lange nicht die gleichen Tagesleistungen zustande bringen, wie der Leichtbepackte. Er braucht sich aber nicht zu beeilen; denn seine Vorräte reichen viel längere Zeit als diejenigen des mit wenig Gepäck Marschierenden. Rein gefühlsmäßig werden wir entscheiden, dass das beste Maßverhältnis zwischen Belastung und Marschleistung irgendwo bei mittleren Gewichten liege. Eine zahlenmäßige Angabe zu machen, ist uns aber unmöglich.

Weiter etwa: Ein durch elektrischen Strom in einem gasgefüllten oder luftleeren Glasballon glühend gemachter Draht sendet um so mehr Licht aus, je mehr er erhitzt wird, das heißt, je stärker der Strom ist, der durch ihn hindurchgejagt wird. Je heißer der Draht aber glüht, desto größer ist auch der Verschleiß, desto kürzer ist die Lebensdauer der Glühbirne. Was ist nun vorteilhafter: große Lichtmengen aus rasch verbrauchten Glühlampen zu erzeugen oder Sparsamkeit im Strom- und Lampenverbrauch?

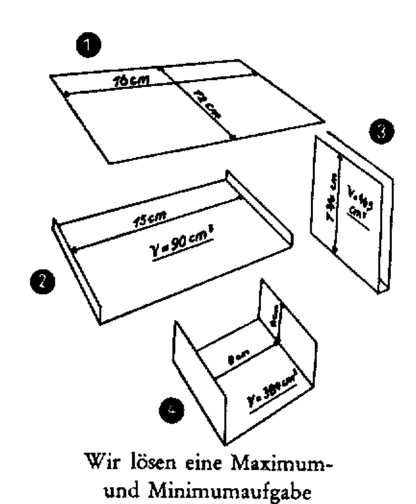
Schon diese willkürlich aufgegriffenen Beispiele zeigen, dass dererlei Fragen, bei denen zwei oder mehrere einander widerstrebende Faktoren ins Gleichgewicht gebracht werden müssen, damit eine Bestleistung oder ein Mindestverbrauch stattfindet, unsere Technik und damit unser ganzes Sein beherrschen. Aber ebenso klar ist auch, dass wir mit Hilfe gewöhnlicher Rechenverfahren, also mit Multiplikation oder Division, Wurzelziehen, Potenzieren und so fort, diesen Problemen einfach nicht an den Leib können, wie wir auch die Frage stellen.

Allerdings wird der Leser, der bisher aufmerksam unseren Darlegungen gefolgt ist, schon eine Methode wittern, die wenigstens rein formgemäß dazu beiträgt, diese spitzfindigen Fragen beantwortbar zu machen; in der Weise nämlich, dass wir zu der Abhängigkeit einer Größe von einer anderen zurückkehren und wieder „Funktionen“ aufzustellen trachten. Es ist zum Beispiel ohne weiteres klar, dass die Anzahl der Tage, die unsere Wüstenwanderer ohne fremde Hilfe durchzuhalten vermögen, von der Menge der mitgeführten Lebensmittel abhängig sein wird. Und genau so wird auch die erreichbare Marschgeschwindigkeit eine „Funktion“ der Belastung sein.

Damit halten wir zugleich den Schlüssel zur Lösung des Problems in der Hand. Wir können zwar nicht die angeführten Beispiele weiter behandeln oder rechnungsmäßig anpacken, denn sie wären beide zu verwickelt. Aber angedeutet kann doch werden, wie man derartige Rechnungen durchzuführen hätte. Zunächst müsste man nämlich Erfahrungstatsachen, Vergleichsziffern sammeln. So etwa: Bei 3 kg bestimmter Lebensmittel hält man 30 Tage aus, bei 15 kg aber nur 12, bei 30 kg nur 19 und so fort. Diese Zahlen müsste man dann, ebenso wie die Stromverbrauchszahlen, die Leuchtstärke bei bestimmtem Stromverbrauch in unserem Glühlampenbeispiel, in mathematische Beziehung zueinander bringen, so dass wir zu niederschreibbaren Funktionswerten kämen. Wie man so etwas anpackt, sei an einem anderen einfachen Beispiel erläutert.

Angenommen, vor uns läge auf dem Tisch ein rechteckiges Blechstück, etwa von der Größe 12 x 16 cm. Wenn wir dieses Blech auf geeignete Weise falten, so erhalten wir ein oben offenes Kästchen, dem nur zwei Seitenwände fehlen. Diese sollen uns indes nicht weiter kümmern; wir schneiden sie uns nach Erledigung der Aufgabe aus irgendeinem anderen Blechstück zu. Vorderhand wollen wir nur bestimmen, wie wir das Blechstück falten sollen, damit in das entstandene Gefäß soviel Wasser wie möglich hineingeht. Oder: Der Rauminhalt (das Volumen) des entstehenden Troges soll ein Höchstmaß (ein Maximum) erreichen.

Hier muss eingeschaltet werden, dass der Rauminhalt der also entstandenen „Wanne“ keineswegs immer der gleiche ist, sondern in hohem Masse von den Seitenverhältnissen des geplanten Kästchens abhängt. Rechnen wir ein paar Fälle durch, wobei wir daran erinnern wollen, dass der Rauminhalt eines so geformten Kästchens gleich Länge mal Breite mal Höhe ist. Wir biegen zunächst das Blech so auf, dass nur ein 5 mm hoher Bord an beiden Enden entsteht. Die Länge des auf dem Tisch aufliegenden Teiles des Bleches wird damit natürlich kürzer, und zwar zweimal um 5 mm (= 0,5 cm). Für die Länge des Kästchens bleiben also $16 - 2 \cdot 0,5 = 15$ cm übrig. Es erhält also die Abmessungen und damit den Rauminhalt von $15 \cdot 12 \cdot 0,5 = 90$ cm^3. Nun machen wir das Kästchen, das bisher flach und niedrig war wie eine Untertasse, sehr schmal und hoch, etwa nur $\frac{1}{2}$ cm breit. Der Rauminhalt beträgt $\frac{1}{2} \cdot 7\frac{3}{4} \cdot 12 = 46\frac{1}{2}$ cm^3, also etwa halb so viel wie in unserer ersten Ausführung. Und nun machen wir den Kasten so, dass ringsum ein 3 cm hoher Bord entsteht, das Kästchen also 3 cm tief wird. Das ergibt einen Rauminhalt von $3 \cdot 10 \cdot 12 = 360$ cm^3. Gewaltige Unterschiede kommen also auf, je nachdem wie wir falten! Wir fragen aber: Wie müssen wir falten, damit wir das Höchstmaß an Rauminhalt bekommen?



Wir lösen eine Maximum- und Minimumaufgabe

Wir müssen zunächst alle unsere Künste spielen lassen, die wir bisher vor allem aus der „Sprache der Mathematik“ kennengelernt haben. In erster Linie steht da wieder die Aufstellung des „Vokabu1ars“ vor uns. Wieder beginnen wir mit der Hauptfrage: Was ist es, das wir wissen möchten und noch nicht wissen? Jetzt heißt es allerdings Acht geben. Man ist nämlich verleitet, zu sagen, dass es das **Volumen** wäre, das wir wissen möchten. Das ist aber nicht richtig. Vielmehr ist das, was wir wissen möchten und nicht wissen, das Maß des Randstückes, das wir vom Blech abbiegen müssen und das dann die Tiefe des entstehenden Kästchens ausmacht. Das also müssen wir x nennen. Denn von dieser Größe, von diesem x,

hängt das Volumen des entstehenden Kastens ab. Nun gehen wir zu allgemeinen Bezeichnungen über: Das Volumen V die Länge des (schließlich beliebig langen) Bleches l und die Breite b.

Die weitere „Kunst“ besteht darin, die Abhängigkeit des Volumens von den hier gegebenen Maßen aufzustellen. Kann uns das schwer fallen? Nein! Denn das Volumen eines rechteckigen Kastens ist und bleibt nun einmal Länge mal Breite mal Tiefe, mögen wir die drei Abmessungen nennen, wie wir wollen. Allerdings ist dabei zu bemerken, dass die Länge unseres werdenden Kastens um so kleiner wird, je tiefer wir ihn machen. Die Länge wird also nie l für sich allein sein können, sondern immer nur $l - 2x$; $2x$ deswegen, weil wir ja an zwei gegenüberliegenden Seiten den Bord, die Seitenwand aus dem Blechstück aufbiegen müssen. Somit ergibt sich für unser Volumen die Formel, richtiger die „Funktion“

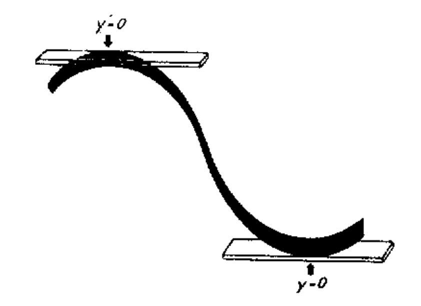
$$V = b \cdot (l - 2x) \cdot x.$$

Um ganz deutlich zu sein, wiederholen wir: b ist die Breite des Bleches, die unverändert bleibt. Die Länge unseres Kästchens wird durch die Blechlänge l bestimmt, von der wir aber zwei Streifen in der Breite des gesuchten x aufbiegen müssen, weshalb sich unser l um $2x$ vermindert. Die entstehende Tiefe des Kastens ist dann eben wieder x. Wir haben also Breite mal Länge mal Tiefe, allerdings anders benannt.

Das nächste ist nun, die rechte Seite der Gleichung auszumultiplizieren. Das ergibt

$$V = b\,l\,x - 2\,b\,x^2.$$

Wir stutzen. Stünde nämlich an Stelle unseres V ein y, so hätten wir eine praktikable Funktionsgleichung vor uns, die wir sogar in unser Koordinatennetz einzeichnen können[1)]. Ob da nun V oder y oder sonst ein Buchstabe steht, ist aber völlig gleichgültig. Wir haben also wirklich eine zeichenbare Funktionsgleichung vor uns, und zwar, wie wir schon aus dem Gliede $2\,b\,x^2$ herauslesen können, eine solche, die eine gekrümmte Linie, eine Kurve, abgeben wird. So eine Kurve hat nun, wie wir wissen, an jedem Punkt einen **anderen Wert für den Differentialquotienten**. Außerdem: Eine Kurve kann himmelan steigen oder sich ins Abgrundtiefe hinunterziehen, sie kann aber auch zuerst steigen, dann fallen, oder zuerst fallen und dann steigen, und so fort. Wenn sie aber steigt und fällt, muss sie einen Höchstpunkt oder einen Tiefstpunkt über der x-Achse haben, also einen Punkt, an dem das y am größten oder am kleinsten wird. Es fragt sich nur, ob wir diese Punkte rechnungsmäßig finden können. Selbstverständlich! Und zwar aus dem Differentialquotienten! Denn es ist klar, dass die Tangente an jedem Punkt, in dem sich das Aufwärts in ein Abwärts wandelt oder umgekehrt, **waagerecht** sein muss, genau so, wie wir etwa den höchsten Punkt einer Kugel als winzig kleine waagerechte Ebene annehmen können, auf die, bei geschickter Arbeit, sogar ein Kartenblatt aufzulegen möglich ist, das dann waagerecht läge. Am Höchst- oder Tiefstpunkt also muss die Tangente an der Kurve eine Waagerechte sein oder mit der x-Achse einen Winkel von 0 Grad einschließen. Nun wissen wir aber schon, dass der Tangens dieses Winkels der Differentialquotient ist. Und da der Tangens von 0 Grad auch 0 ist, so muss der Differentialquotient ebenfalls 0 sein. Damit



Beim Minimum und Maximum ist $y' = 0$

[1)] Eine Aufgabe, die dem Leser empfohlen wird.

haben wir gewonnen! Wir differenzieren einfach die aufgestellte Gleichung und setzen den Differentialquotienten gleich Null. Und aus dieser neuen Gleichung, auf deren einer Seite eben eine Null steht, rechnen wir das für uns günstigste x aus. Unsere Gleichung lautet:

$$V = b\,l\,x - 2\,b\,x^2.$$

Das wird differenziert:

$$V' = b\,l - 4\,b\,x,$$

und ergibt gleich Null gesetzt:

$$0 = b\,l - 4\,b\,x.$$

Jetzt addieren wir zu beiden Seiten der Gleichung $4\,b\,x$, um das $4\,b\,x$ auf eine Seite herüberzubekommen. Das ergibt, da sich rechts $-\,4\,b\,x$ und $+\,4\,b\,x$ gegenseitig aufheben,

$$4\,b\,x = b\,l.$$

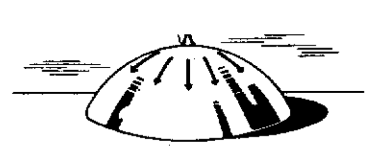
Nun können wir noch beide Seiten der Gleichung durch b dividieren, das dadurch ganz wegfällt. Wir erhalten $4\,x = l$ oder durch 4 beiderseits dividiert:

$$x = \frac{l}{4}$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst! Denn, wir wissen jetzt: Die Länge des vorliegenden Blechstückes müssen wir durch 4 teilen und den Kasten durch Aufbiegen $\frac{1}{4}$ so hoch machen, wie das Blech lang ist; dann weist das entstandene Kästchen den Höchstwert des Rauminhaltes auf. Da unser Blech 16 x 12 cm groß ist, müssen wir es an beiden Seiten 4 cm hoch aufbiegen. Wir erhalten dann den Raumhöchstinhalt von

$$V = 8 \cdot 12 \cdot 4 = 384\ \text{cm}^3.$$

Natürlich hat die Geschichte noch einen Haken. Wir hätten nämlich, da sowohl der Höchst- als auch der Tiefstpunkt einer Kurve waagerechte Tangenten und damit beide den Differentialquotienten Null haben, auch den **Mindestwert** ermitteln können. Aber auch da haben wir einen Helfer, der sofort darüber Klarheit verschafft, ob wir bei der Kurve hoch oben „am Gipfel“ oder ganz tief unten „in der Talsohle“ angekommen sind. Es ist der **zweite** Differentialquotient, von dem wir schon kurz erfahren haben, dass er uns die **Änderung der Steigung** angibt, und zwar am einfachsten so: Wird die Änderung der Steigung negativ, so geht es bergab. Daraus wissen wir, dass wir ganz hoch oben sind; denn vom Höchstpunkt, vom Gipfel, geht es überallhin bergab, überallhin ist die Änderung der Steigung negativ. Umgekehrt ist es ganz tief im Tal. Von dort aus nimmt die Steigung überallhin zu, dort also muss die Änderung der Steigung **positiv** sein. Wir brauchen uns also nur den zweiten Differentialquotienten anzusehen, ob er negativ oder positiv ausfällt. Dann wissen wir alles. Probieren wir es bei unserem Beispiel, wobei wir nur daran erinnern wollen, dass man durch





Was uns der zweite Differentialquotient verrät

nochmaliges Differenzieren des ersten Differentialquotienten den zweiten bekommt. Unsere Gleichung lautete:

$$V = b\,l\,x - 2\,b\,x^2.$$

Das ergab differenziert den ersten Differentialquotienten:

$$V' = b\,l - 4\,b\,x.$$

Differenzieren wir das noch einmal, so werden bekanntlich die x nicht enthaltenden Glieder gleich Null. Und so ergibt sich der zweite Differentialquotient mit

$$V'' = -4\,b.$$

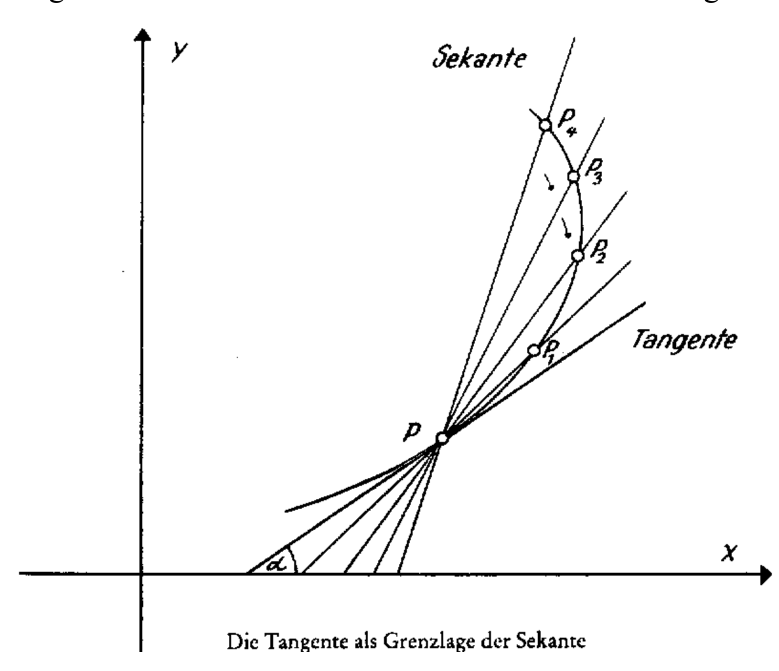
Wir haben also wirklich richtig gerechnet! Der zweite Differentialquotient zeigt das Minuszeichen, er ist negativ. Er sagt: Überall geht es bergab! Also waren wir wirklich auf dem Gipfel, wir haben tatsächlich den Höchstwert, das Maximum, errechnet!

Damit hätten wir die allgemeingültige Art der Berechnung von Höchst- und Mindestwerten kennengelernt. Dass die Sache — leider! — nicht immer so leicht ist wie hier in diesem vielleicht einfachsten Beispiel, wird uns der Leser wohl glauben.

Der eine oder andere Leser wird es vielleicht bedauern, wenn wir dieses interessante Gebiet allzu schnell wieder verlassen. Wir wollen daher noch eine kleine Zugabe geben, die nur für besonders interessierte Leser bestimmt ist.

Die Fragestellung ist natürlich immer dieselbe: **Wie kann man die Steigung der Tangente einer Kurve bestimmen ?**

Wir haben dieses Problem bisher nur rein geometrisch gelöst. Das heißt, wir haben die Tangenten an verschiedene Punkte einer Parabel gezeichnet, und haben eine gewisse Gesetzmäßigkeit dabei erkannt. Dieses zeichnerische Verfahren muss naturgemäß wenig befriedigen, wenn man an die unendliche Zahl von Punkten denkt, die eine Kurve nun einmal erst ausmachen.

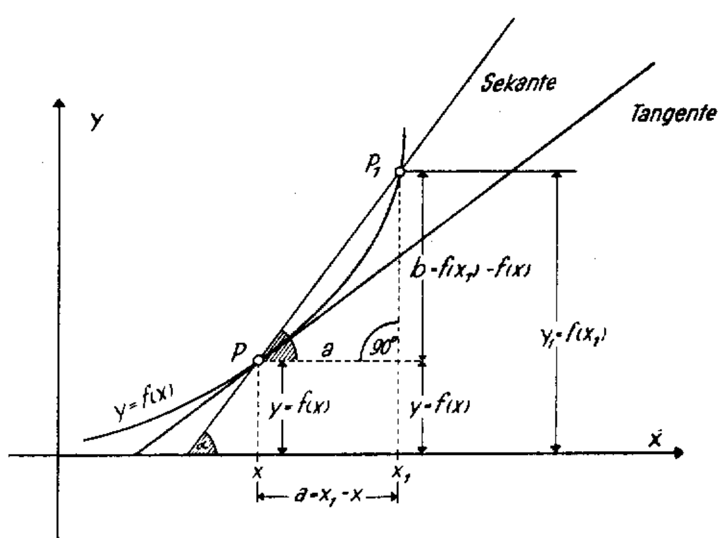


Die Tangente als Grenzlage der Sekante

Doch diesmal sind wir viel bescheidener. Nach dem Motto: „Der Spatz in der Hand...“, betrachten wir nicht die Tangente, sondern die benachbarten **Sekanten**. Das sind die Geraden, die die Kurve in mindestens zwei Punkten schneiden. In der Abbildung haben wir einige

Sekanten eines Kurvenstücks[1] eingezeichnet, die alle durch den Punkt *P* gehen. Wir erkennen, dass die **Tangente die Grenzlage der Sekanten** ist, wenn also der zweite Sekantenschnittpunkt immer dichter an den Punkt *P* herankommt und schließlich mit ihm zusammenfällt. Damit ist klar, was wir vorhaben. Wir berechnen die Steigung der Sekante und stellen fest, was aus dem Steigungsfaktor wird, wenn die Sekante in die Tangente übergeht.

Gehen wir wieder von unserer Parabel $y = x^2$ aus, dann ... Doch halt, wir können das Problem ja schon viel eleganter lösen. Wozu von der Parabel ausgehen? Unsere Betrachtungen gelten ja auch für alle möglichen Kurven und ihre Funktionsgleichungen! Wichtig ist doch nur die Tatsache, dass wir gekrümmte Kurven untersuchen wollen, deren y-Koordinaten von x-Koordinaten abhängen. Wie diese Kurven im Einzelfall aussehen, interessiert uns zunächst gar nicht. Wir brauchen uns deshalb auch nicht um die Funktionsgleichung zu kümmern, die kann aussehen, wie sie will, wenn jedes y nur von einem x abhängt, also eine Funktion von x ist, deren Bild eine einigermaßen „vernünftige“ Kurve ergibt. Diesen allgemeinen Zusammenhang gibt aber, wie wir bereits wissen, die Gleichung $y = f\,(x)$ vollständig an. Also noch einmal, die hingeschriebene Gleichung sagt nur, dass jedes y allein von einem x abhängt. Setzt man z. B. ein x_1 in die Gleichung ein, dann kommt automatisch auch ein $y_1 = f\,(x_1)$ heraus. Es gibt da natürlich noch besondere Feinheiten, auf die es uns aber vorläufig nicht ankommt. Wer hier Schwierigkeiten hat, setze für $f\,(x)$ in Gedanken einfach eine bestimmte Funktion, z. B. $y = 2\,x^2$, ein. Also, nicht verwirren lassen!



Der Differentialquotient

Wie man nun die Steigung der Sekante erhält, lesen wir am besten gleich aus der Zeichnung ab. Betrachten wir das rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse $P\,P_1$, dann erkennen wir, dass die Katheten

$$a = x_1 - x \qquad \text{und} \qquad b = y_1 - y = f\,(x_1) - f\,(x)$$

sind. Damit können wir den **Steigungsfaktor der Sekante** sofort angeben:

[1] Diese Kurve ist keine Parabel; die Zusammenhänge lassen sich aber auch an der Parabel erklären, nur wird die Zeichnung dadurch sehr unübersichtlich.

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Aus der Abbildung lesen wir im übrigen noch ab, dass $x_1 = x + a$ ist. Wir können also auch schreiben

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

wobei wir für x_1 einfach überall $x + a$ eingesetzt haben. Wenn nun der Punkt P_1 immer näher an P heranrückt, dann wird $a = x_1 - x$ beliebig klein. Man sagt: a geht gegen Null (in Zeichen: $a \to 0$). **Aus der Sekante wird die Tangente und aus dem Steigungsfaktor der Sekante wird der Steigungsfaktor der Tangente, d.h. der Differentialquotient.** Dafür schreibt man kürzer:

$$\left(\frac{b}{a} =\right) \frac{f(x+a) - f(x)}{a} \ \to\ y' \text{ für } a \to 0.$$

(Sprich: Der Quotient $f(x + a) - f(x)$ durch a geht gegen den Differentialquotienten Ypsilon-Strich für a gegen Null).

Was man damit machen kann, soll ein Beispiel zeigen.

Differenziere die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x}$. Ja, das ist eine kleine Überraschung! Wir können das jetzt ohne weiteres ausrechnen.

Setzen wir in $f(x) = \frac{1}{x}$ für x einfach $x + a$ ein, dann ist damit

$$f(x+a) - f(x) = \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}.$$

Wir müssen also zwei Brüche subtrahieren. Das macht man auch mit allgemeinen Zahlen genauso wie mit gewöhnlichen Zahlen-Brüchen und bestimmt zunächst den Hauptnenner. Dieser ist ganz einfach $x(x + a)$. Also

$$\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+a)}{x(x+a)} = \frac{-a}{x^2 + ax}$$

Für den wenig geübten Leser schreiben wir das noch einmal ausführlich auf: Es ist

$$\frac{1}{x+a} = \frac{x}{x(x+a)} \text{ und } \frac{1}{x} = \frac{x+a}{x \cdot (x+a)}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+a)} - \frac{x+a}{x(x+a)} = \frac{x - (x+a)}{x(x+a)} = \frac{x - x + a}{x^2 + ax} = \frac{-a}{x^2 + ax}$$

Damit wird nun

$$\frac{f(x+a)-f(x)}{a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{-a}{x^2+ax}=\frac{-1}{x^2+ax}\,.$$

Lassen wir jetzt a gegen Null gehen, dann bleibt schließlich im Nenner nur das x^2 übrig. Gleichzeitig geht dann aber auch $\frac{f(x+a)-f(x)}{a}$ gegen den Differentialquotienten y' der Funktion $y=\frac{1}{x}$. Wir erhalten also das Ergebnis:

$$y'=-\frac{1}{x^2}$$

ist der Differentialquotient der Funktion

$$y=\frac{1}{x}\,.$$

Das Ganze geht natürlich schon etwas über das gesteckte Ziel hinaus. Aber auch der Leser, der nicht mehr ganz folgen konnte und der sich damit an unsere Warnung, nicht die schön angelegten Wege des Zaubergartens zu verlassen, strikt gehalten hat, dürfte etwas von der Eleganz mathematischer Lösungsmethoden verspürt haben. Diejenigen aber, die durch das Gestrüpp am Wege hindurchgekommen sind, mögen sich nicht einbilden, nun die ganze Differentialrechnung verstanden zu haben. Wir sind nämlich auf die vielen Schwierigkeiten, die da noch lauern, überhaupt nicht eingegangen.

Und wenn auch der Differentialquotient auf den ersten Blick einen beinahe harmlosen Eindruck macht, in Wirklichkeit hat er es faustdick hinter den Ohren!

Wir sind bei diesem Problem von der geometrischen Fragestellung ausgegangen. Wir betrachteten die Tangente an eine Kurve als Grenzlage der Sekante durch zwei Kurvenpunkte. Das ist auch die Methode, die Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) benutzt hat. Unabhängig von ihm, gelangte Isaak Newton (1642 - 1727) zu entsprechenden Ergebnissen. Er gilt daher ebenfalls als Begründer der Differentialrechnung.

Was geschieht aber, wenn die Sekante für einen ins Auge gefassten Punkt keine Grenzlage hat? — Damit kommen wir zu der Frage, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit sich eine Funktionskurve überhaupt differenzieren lässt. Die Untersuchung dieser Frage ist eines der Hauptprobleme der Differentialrechnung.

Auch um die begrifflichen Feinheiten haben wir uns nicht kümmern können. Worauf es uns aber besonders ankam, ist dieses Rechnen mit beliebig kleinen Größen. Letztlich haben wir doch den Differentialquotienten aus einem rechtwinkligen Dreieck mit beliebig kleinen Katheten erhalten. Wir haben sozusagen ein Dreieck mit kleinsten, denkbaren Seiten betrachtet. Kein Mensch kann diese Seiten jemals messen, sie sind immer noch kleiner als klein. Ja, selbst die kleinsten atomaren „Größen“ sind immer noch nicht klein genug. — Und trotzdem, dieser Quotient, dieses Seitenverhältnis, existiert tatsächlich.

An diesen Zusammenhang denkt man, wenn man für y die Schreibweise

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

(sprich: De-Ypsilon nach De-Iks) benutzt. Dass es sich hierbei aber nicht nur um eine andere Schreibweise handelt, sondern in der Tat um den Quotienten aus den beiden sogenannten „Differentialen“ dy und dx kann an dieser Stelle nicht erklärt werden. Trotzdem wollen wir uns diese Tatsache gut merken!



Wer fürchtet sich vorm Integral?

Die Beantwortung der Frage, ob man wohl von einem Differentialquotienten auch wieder zurück zu der ursprünglichen Funktion kommt, scheint auf den ersten Blick unmöglich, denn die ganze Geschichte ist einigermaßen undurchsichtig. Man muss sich aufs Probieren und Herumraten verlegen, wenn man es jetzt weiterbringen will. Aber wir haben ja schon einiges gelernt, und so muss uns die **Umkehrung** der bisher behandelten Aufgabe — und wie klar ersichtlich, handelt es sich ja auch um nichts anderes — doch auch gelingen.

Jetzt heißt es natürlich, etwas aufpassen! — Wenn jemand kommt und sagt, der Differentialquotient in einem bestimmten Punkt einer Kurve ist gleich vier, dann können wir damit überhaupt nichts anfangen. Wir können uns drehen und wenden, wir kommen nicht einen einzigen Schritt weiter. Der Betreffende muss uns schon noch verraten, ob und wie der Differentialquotient von x abhängt. Sonst ist die ganze Aufgabe sinnlos! Wir wollen deshalb auch nicht weiter darauf eingehen, sondern nehmen in jedem Fall an, dass diese Voraussetzung erfüllt ist.

Die Aufgabe, suche aus dem Differentialquotienten 4 die Funktion, hat nunmehr einen Sinn. In diesem Fall können wir sofort darauf schließen, dass es sich nur um eine lineare Funktion handeln kann. Nur diese hat einen konstanten, von x unabhängigen Differentialquotienten.

Wir wissen also schon so etwa, was herauskommen wird. Das soll uns aber nicht davon abhalten, dieses erste, einfache Beispiel besonders ausführlich zu behandeln.

Packen wir also unseren Differentialquotienten ein wenig schärfer an, wobei wir uns der etwas komplizierteren Schreibweise des Differentialquotienten mit $\frac{dy}{dx}$ befleißigen

Der Differentialquotient der gesuchten Funktion ist 4, das schreiben wir auf:

$$\frac{dy}{dx} = 4.$$

Wir steuern nun auf die Lösung, auf die ursprüngliche Funktionsgleichung zu, und zwar wollen wir sie in der Form haben, dass sie, wie gewohnt, beginne mit: y = soundso viel ...

Nun arbeiten wir aber nicht mehr mit y allein, sondern auch mit dem verschwindenden, schier unendlich kleinen dy. Also müssen wir bei dem Suchen unserer Funktion damit beginnen, dass wir dy = ... aufschreiben. Frage: Was ist aber jetzt aus dem armen dx geworden, wo ist es hin? Nun, wir haben es dadurch aus der ersten Hälfte unserer begonnenen Gleichung zum

Verschwinden gebracht, dass wir diese mit dx multiplizierten. Bei einer Gleichung ist nun alles gestattet, wenn man es nur auf beiden Seiten tut. Also müssen wir jetzt gerechterweise auch die andere Seite unserer Gleichung mit dx multiplizieren. Wir müssen demnach richtig schreiben: $dy = 4 \cdot dx$ (sprich: De-Ypsilon gleich 4 De-Iks).

Jetzt ist noch der Name für die neu gefundene Rechenoperation, nämlich das Suchen der Funktion aus dem Differentialquotienten, einzuführen. Man nennt sie „**Integrieren**“, und den Befehl „Suche aus diesem Differentialquotienten die dazugehörige Funktionsgleichung!“ schreibt man so, dass man vor die Differentiale dy und dx

das Integralzeichen $\int$

setzt.

Und so ergibt sich eine Niederschrift unserer Rechnung in folgender Form:

$$\int dy = \int 4\, dx.$$

In Worten ausgedrückt: Das Integral von De-Ypsilon ist gleich Integral von vier De-Iks!

Nun rechnen wir aus, und es ergibt sich **zunächst** aus der Tatsache, dass ja nur eine **lineare** Funktion herauskommen kann,

$$\int dy = y; \qquad \int 4\, dx = 4\,x.$$

Aber damit sind wir noch nicht fertig; denn, wie wir schon wissen, kann ja neben der das x enthaltenden Zahlenangabe noch eine weitere nicht mit x verquickte Zahl bei der Funktion gewesen sein. Diese Zahl können wir vorläufig nicht finden. Aber die Möglichkeit ihrer Existenz müssen wir wenigstens zugeben. Und wir setzen für jenes Glied der vorhanden gewesenen Funktionsgleichung, das beim Differenzieren „in den Brunnen gefallen“ sein könnte, eine unbestimmte Konstante, Integrationskonstante geheißen, die mit C bezeichnet wird. So ergibt sich endlich die genaue Formel:

$$y = \int 4\, dx = 4\,x + C.$$

So! Und damit sind wir endlich so weit und haben die erste Integralrechnung glorreich beendet und auch — zwar etwas schwerfällig für den hier vorliegenden einfachen Zweck — „zunftgemäß richtig“ aufgeschrieben.

Diese verflixte Integrationskonstante C — die natürlich auch eine negative Zahl sein kann — bleibt unbestimmt. Sie darf aber keineswegs weggelassen werden, da sie in den Anwendungen i. A. eine besondere Bedeutung hat, die sich aus der jeweiligen Aufgabenstellung ergibt.

Geht z. B. aus der Aufgabe hervor, dass die Gerade durch den Punkt mit den Koordinaten $x = 1$ und $y = 4$ gehen muss, dann können wir C berechnen. Wir brauchen diese Werte nur in die Gleichung der Geraden $y = 4\,x + C$ einzusetzen und erhalten

$$4 = 4 \cdot 1 + C = 4 + C.$$

Zieht man von beiden Seiten der Gleichung noch 4 ab, dann bleibt $C = 0$ übrig. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet dann einfach

$$y = 4.$$

Immerhin müssen wir uns merken: Die Bestimmung der Integrationskonstanten gelingt nicht immer! Es ist daher stets etwas Unbestimmtes um diese „Art“ von Integralen. Man nennt sie demnach auch „unbestimmte Integrale“.

Das war also nicht allzu schwer! Doch, wie kann man aber z. B. den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = 4\,x^3$ integrieren? Dazu wieder holen wir, was wir über das Differenzieren von Potenzen wissen.

Habe ich irgendeine Funktion in der Form einer Gleichung, etwa $y = a\ x^n$, gegeben, so bestimme ich den Differentialquotienten nach der Formel:

$$y' = n \cdot a \cdot x^{n-1}$$

das sieht zwar „erschröcklich“ ☺ aus, ist aber in Wirklichkeit ganz harmlos. Dazu noch schnell ein Beispiel. Ist die Funktion etwa:

$$y = 22\,x^2 + 11\,x + 56,$$

so ergibt das nach obiger Formel differenziert:

$$y' = 44\,x + 11 + 0.$$

Also merken: Der Potenzexponent (= die kleine Hochzahl der unabhängigen Variablen) kommt als Faktor vorn herunter, und der Exponent wird gleichzeitig um Eins verkleinert. Glieder, welche die Variable nicht enthalten, werden zu Null und fallen weg. Die Umkehrung dieses Rechenvorganges ist also das Integrieren, der betreffende Rechenbefehl ist das Integralzeichen. Die Haupt- und Grundregel für die Integralrechnung, d. h. das Bestimmen der Funktion aus ihrem Differentialquotienten, lautet:

1. Die konstanten nicht veränderlichen Faktoren können vor das Integralzeichen gesetzt werden, sie geht das Integrieren nichts an.

2. Die Integration, z. B. von $\frac{dy}{dx} = x^m$, geschieht nach der Umkehrung der vorhin für das Differenzieren gegebenen Formel, nämlich so:

$$y = \int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

Das heißt: Beim Integrieren wird die Potenz der Veränderlichen um Eins erhöht und gleichzeitig die zu integrierende Größe (der Integrand) durch den Wert des um Eins erhöhten Potenzexponenten dividiert.

Von der Richtigkeit dieser Regel können wir uns sofort überzeugen, wenn wir $y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ differenzieren. Dann muss ja wieder x^m, also der Integrand herauskommen. So ist es aber in der Tat, denn wir erhalten

$$\frac{dy}{dx} = (m + 1) \cdot \frac{x^{m+1-1}}{m+1} + 0 = x^m.$$

Wir sehen übrigens auch, dass die leider notwendige Integrationskonstante beim Differenzieren wieder wegfällt.

Jetzt können wir auch unsere eingangs erwähnte Aufgabe, $\frac{dy}{dx} = 4\,x^3$ zu integrieren, lösen.

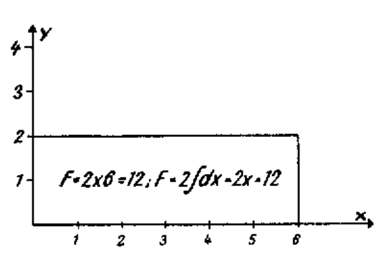
$$y = \int 4x^3 dx = 4 \int x^3 dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} + C = x^4 + C.$$

Noch ein Beispiel:

$$y = \int (44x + 11)\, dx = \frac{44x^2}{2} + \frac{11x}{1} + C = 22\, x2 + 11\, x + C.$$

Das Ganze klingt aber doch ein wenig unbefriedigend und nebelhaft, vor allem im Vergleich zur handlich erfassbaren Größe des Differentialquotienten. Das Integral aber kneift uns aus! Denn es macht aus dem biederen Differentialquotienten doch nur wieder eine Funktion, und dazu noch eine, die mit einer unbestimmten Konstanten C behaftet bleiben muss.

Aber wir können uns trösten, denn wir haben bisher die allerwichtigste Rolle des gebieterischen Integralzeichens noch gar nicht kennengelernt! Mit ihr wollen wir uns jetzt beschäftigen. Wieder gehen wir von einer einfachen Tatsache aus. Wir betrachten nämlich die so ganz einfache Funktion $y = 2$ und zeichnen das in unserem Koordinatensystem auf. Was herauskommen muss, ist klar. Der Gleichung $y = 2$, oder deutlicher gesagt: „Ypsilon ist immer und unter allen Umständen zwei!“, entspricht eine merkwürdige Linie, nämlich eine **Gerade**, auf der alle Punkte, ohne Rücksicht auf das x, immer nur ein y von 2 haben, also in der Höhe 2 über der waagerechten x-Achse liegen müssen. Das Bild unserer Beziehung $y = 2$ ist demnach eine Waagerechte, die in der Höhe 2 über der waagerechten x-Achse dahinzieht.



Das Integral und der Flächeninhalt eines Rechtecks

Nun machen wir uns den Spaß und ziehen bei $x = 6$ eine Senkrechte von der Waagerechten zur x-Achse herunter. Es ist nun ein Rechteck entstanden, das 2 (wenn wir in cm gemessen haben, also 2 cm) hoch und 6 lang ist. Auf einen Blick können wir auch den Flächeninhalt des Rechteckes angeben, der bekanntlich Länge mal Breite — hier also die Höhe — ist. Das ergibt $2 \cdot 6 = 12$. Nun integrieren wir aber unsere Funktion $y = 2$. Wir schreiben also

$$\int 2dx = 2 \int dx = 2\,x$$

nach der bekannten, bereits angeführten Integrationsformel, ohne uns allerdings zunächst um die Integrations-Konstante C zu kümmern.

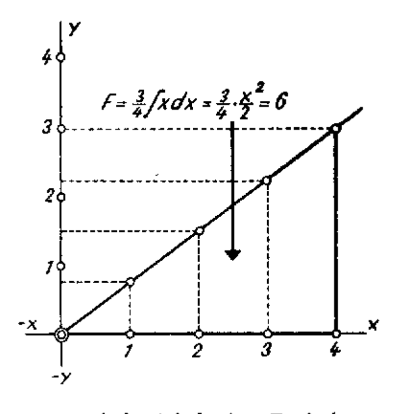
Das Ergebnis ist einigermaßen verwunderlich. Man braucht aber nicht lange herumzusuchen, um hinter das Geheimnis dieser 2 x zu kommen. Denn setzt man für x etwa den Wert 6 ein, so erhält man 12. Das ist der **Flächeninhalt** des vorhin gezeichneten Rechteckes! Und es ist ebenso schnell klar, dass diese durch die Integration gewonnene Formel schlechthin für jedes x, also für jedes beliebig lang angenommene Rechteck, gelten muss! Man mag welchen Wert immer einsetzen — die durch Integration gewonnene Formel gibt uns den **Flächeninhalt** des Rechteckes an, welches von der Waagerechten, der x- und y-Achse und der bei dem betreffenden x-Wert gezogenen Senkrechten gebildet wird.

Nun sehen wir nach, was geschieht, wenn wir unsere Erfahrung an einem Gebilde, das kein Rechteck ist, also etwa an einem Dreieck, versuchen. Wenn wir Dreiecke haben wollen, so muss die gegebene Gerade geneigt sein. Das erfordert, dass das y nicht überall gleich hoch ist, sondern sich mit den x-Werten ändert. Wir nehmen also etwa die Funktion $y = \frac{3}{4}x$ und integrieren. Das ergibt:

$$\frac{3}{4}\int x\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{2}$$

Wir zeichnen jetzt unsere Gerade auf und „Zäunen“ durch eine bei $x = 4$ gezogene Senkrechte ein Dreieck ein. Wie jeder weiß, ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks die **Hälfte** dessen, was herauskommt, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multipliziert.

Das ergibt hier $4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6$.



Der Flächeninhalt eines Dreiecks

Und jetzt gehen wir an unsere durch Integration gewonnene Formel. Sie ergibt

$$\frac{3}{4}\cdot 16\cdot\frac{1}{2} = 6,$$

wenn wir $x = 4$ setzen. Womit wieder der Flächeninhalt des Dreiecks haargenau getroffen worden ist! Die beiden Formeln, die landläufige und die durch Integration gewonnene, sind einander völlig gleichwertig.

Damit ist klargeworden, dass wir, da die Flächeninhalte sowohl von Rechtecken als auch von Dreiecken bestimmbar sind, mit Hilfe der neuen Methode **jedes beliebige Vieleck** gleichfalls rechnerisch zu erfassen imstande sein müssen, denn alle Vielecke lassen sich ja in Dreiecke und Rechtecke zerlegen.

Verweilen wir einen Augenblick! Die hier gefundene Feststellung ist einigermaßen überraschend. Denn wenn wir glattheraus sagen, dass jede Flächeninhaltsbestimmung an geradlinig begrenzten Flächen eigentlich immer eine Integration bedeute, so kann uns nach dem Gefundenen niemand mehr widersprechen. Und es ergibt sich die absonderliche Tatsache, dass alle Mittelschüler, die sich mit Flächenbestimmungen von Rechtecken und Dreiecken plagen, alle Dachdecker, Tapezierer und Schneider, die Blech-, Papierflächen oder Stoffmengen berechnen, im Grunde nichts anderes machen, als die Integralrechnung praktisch anzuwenden, ohne allerdings die leiseste Ahnung davon zu haben, dass ihre einfache und

doch so wichtige Berechnungskunst, mit der sie Tag für Tag zu tun haben, einen so unheimlichen Namen und ein so schreckeinjagendes Rechenbefehlszeichen führt.

Natürlich kann hier der Einwand erhoben werden, dass wir mit Hilfe der umständlich-verwickelten Integralrechnung nur etwas erreicht hätten, was die elementare Geometrie auch vermag. Man könne die Flächeninhalte aller von Geraden begrenzten Flächen berechnen, ohne von der höheren Mathematik eine blasse Ahnung zu haben. Und dieser Einwand ist richtig! Wir haben tatsächlich bisher gewissermaßen mit Rasiermessern Brot geschnitten, eine feinstgeschliffene Rechenkunst dort mit Erfolg angewandt, wo eine ganz grobe und einfache auch genügt hätte. Aber der „Hauptschlager" kommt erst!

Und zwar bei Figuren, die von **gekrümmten Linien** begrenzt sind! Nehmen wir wieder unsere Apollonische Parabel $y = x^2$ her.

Wenn wir jetzt vor die Aufgabe gestellt werden, etwa das Flächenstück zu berechnen, das zwischen der steil aufsteigenden Parabel und der x-Achse bis zur Senkrechten über dem Punkt $x = 4$ liegt, so sitzen wir mit unserer „elementaren" Geometrie vollkommen auf dem Trockenen! Denn wir haben es hier mit einer dreieckähnlichen Figur zu tun, die sich aber von einem „echten" Dreieck sehr unangenehm dadurch unterscheidet, dass eine Seite eine **Kurve**, und zwar ein Parabelstück ist!

Jetzt zeigt sich die großartige Überlegenheit der Integralrechnung. Da wir mit dem feingeschliffenen Gedankenwerkzeug der höheren Mathematik auch die winzigsten Veränderungen ermitteln können, sofern uns nur eine Gleichung deren Gesetzmäßigkeit offenbart, so gleitet hier der Integralbegriff nicht ohnmächtig an der gekrümmten Linie ab. Ja, er nimmt sie mit der gleichen Selbstverständlichkeit zwischen seine Zangen wie die Gerade, welche vom Standpunkt der höheren Mathematik betrachtet, nichts anderes ist als auch eine Kurve und nur den Sonderfall einer Kurve darstellt, die sich weder aufwärts noch abwärts krümmt. Und so können wir mit Hilfe der Integralrechnung ohne Bedenken an die gestellte Aufgabe herangehen. Die Funktion der Kurve lautet: $y = x^2$.

Das integrieren wir:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Setzen wir darin etwa den Wert $x = 3$ ein, so erhalten wir die Fläche, die umschlossen wird von der Parabel und der x-Achse sowie von der im Punkt $x = 3$ auf die x-Achse gezogenen Senkrechten. Somit ist $F = \frac{27}{3} = 9$; beim Punkt $x = 4$ ergibt sich ebenso $64 : 3 = 21\frac{1}{3}$. und so fort. Natürlich haben wir dadurch auch den Teil der Fläche bestimmt, der innerhalb der Parabel bis zur y-Achse liegt und oben durch eine Waagerechte vom Punkt der Parabel $x = 3$ begrenzt wird. Denn wir können die Fläche dieses Rechteckes im Handumdrehen berechnen. Es ist $9 \cdot 3 = 27$ groß. Ziehen wir davon den unterhalb der Parabel liegenden Teil mit 9 ab, so erhalten wir 18.

Wir versuchen's mit der Parabel!

Hier sei eine kleine Zwischenbemerkung erlaubt: Wir sind heute nur zu leicht geneigt, die Leistungen der Völker des Altertums auf dem Gebiet der Naturwissenschaften und der Technik spöttisch und selbstüberheblich zu unterschätzen. Mit Unrecht! Denn die hier gezeigte Flächenberechnung der Parabel, also einer krummlinig begrenzten Fläche, auf Grund scharfsinniger Überlegungen, die gewissermaßen die Kunst der Integralrechnung vorausahnen ließen, kannte schon der geniale **Archimedes** zweitausend Jahre früher, bevor Leibniz und Newton die Differentialrechnung begründeten.

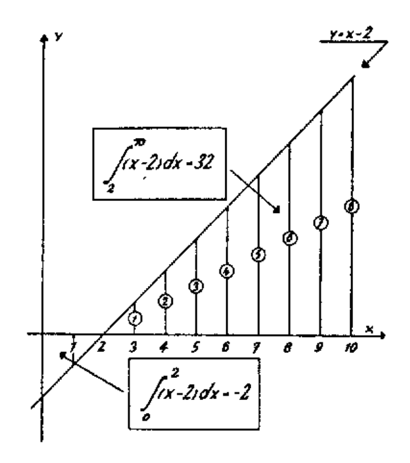
Nun noch eine kleine Richtigstellung. Wir haben es bisher der ganz vereinfachten Darstellungsweise halber ein wenig nachlässig getrieben, was jetzt berichtigt werden muss. Wir brauchen nämlich nur bei unseren „Quadraturen“, d. h. den Flächenbestimmungen, mit Hilfe der Integralrechnung unser Beispiel ein wenig zu verändern, um gleich einem Unsinn aufzusitzen. Nehmen wir einmal die Funktion $y = x - 2$ her und zeichnen wir die dazugehörige Gerade auf. Wie sofort ersichtlich, schneidet diese unter 45 Grad aufsteigende Gerade die x-Achse beim Punkt $x = 2$ da für diesen Wert $y = 2 - 2 = 0$ wird. Nun wollen wir den Flächeninhalt des Dreiecks bestimmen, das durch die Senkrechte über dem Punkt $x = 10$ begrenzt wird. Wie unsere gewöhnliche Flächenberechnung sofort verrät, ist der Flächeninhalt des Dreieckes $8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 32$. Nun beginnen wir mit der Integralrechnung. Die Funktion $y = x - 2$ ergibt integriert:

$$\int (x-2)dx = \frac{x^2}{2} - 2x$$

Setzen wir in diese Formel den Wert $x = 10$ ein, so erhalten wir zu unserer peinlichen Überraschung ein falsches Ergebnis, nämlich

$$\frac{100}{2} - 20 = 30$$

Wo steckt da der Fehler?



Das unerbittlich genaue Integral!

Kurz gesagt: Das Integral **hat recht**, aber wir waren eben nachlässig; denn das strenge, unerbittliche Integral hat die **gesamte Fläche** rechts von der y-Achse erfasst, ging von dem Wert $x = 0$ aus und nahm restlos alles an Fläche, was bis zum Wert $x = 10$ vorliegt. Das ist aber nicht nur allein das von uns gewünschte Dreieck **über der *x*-Achse**! Denn dadurch, dass unsere Gerade beim Punkt $x = 2$ durch die x-Achse hindurchgeht, entstand **unter** dieser noch ein zweites Dreieck mit dem sofort ablesbaren Flächeninhalt 2. Wir müssen aber jetzt genau sein, um uns nicht noch einmal vor dem Integralzeichen und seiner eleganten Unerbittlichkeit zu blamieren. Genau besehen, ist nämlich an diesem im **vierten** Quadranten gelegenen Dreieck die auf der x-Achse liegende

Seite zwar **positiv**[1]; die zweite Seite, die eben nach unten hin zielt und unter der x-Achse liegt, ist jedoch **negativ** ! Da aber das Produkt aus einer positiven und einer negativen Zahl wieder ein negatives Produkt ergibt, so ist, vom Integral aus gesehen, der Flächeninhalt des Dreieckes negativ zu werten und somit **abzuziehen** ! Denn: $(+2) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} = -2$. Somit setzt sich die vom Integral erfasste Fläche aus zwei Teilen zusammen: aus einer positiven, über der x-Achse gelegenen Dreiecksfläche von 32 und einer negativen von – 2. Beide zusammen aber ergeben + 30. Mit einem Wort: Das Integral mit seiner Zaubermacht hat recht behalten! Nur wir haben ungenau gerechnet.

Natürlich lässt sich diese geradezu unerbittliche Strenge und Exaktheit des Integrals nirgends durchbrechen. **Wir** müssen daher genauer und sorgfältiger werden, und zwar durch die genaue Begrenzung des Integralbegriffs. Wir schreiben dem Integralbefehl einfach vor: „Von daher und bis dorthin möchte ich die Fläche haben!" Und diese Einschränkung führt uns zu der üblichen Schreibweise des sogenannten bestimmten Integrals mit scharf angegebenen Grenzen. Man macht das einfach so: Wollen wir, dass (wir bleiben bei unserem Beispiel $y = x - 2$) das Integral nur von 2 bis zu 10 gilt, so schreiben wir diese „obere" und „untere" Grenze an das Integralzeichen hin. Also gilt:

$$\int_2^{10} (x-2)\, dx = ...$$

(Sprich: „Bestimmtes Integral x – 2 De-Iks von 2 bis 10").

Und jetzt rechnen wir einfach aus:

$$\int_2^{10} (x-2)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)_2^{10} = \left(\frac{100}{2} - 20\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right) = 32$$

Zur Erklärung dieser Rechnung: Wir setzen für x erst einmal 10 ein, das ergibt den Ausdruck in der vorletzten Klammer. Davon ist das abzuziehen, was herauskommt, wenn man für $x = 2$ einsetzt. Das ergibt den Ausdruck in der letzten Klammer. Der Wert innerhalb der zweiten Klammer ist $\frac{4}{2} - 4 = -2$ und ist also von dem, was in der ersten Klammer steht — und das ergibt ausgerechnet 30 —, abzuziehen, wobei die Vorzeichenvertauschung – (– 2) = + 2 eintritt. Daher ergibt sich schließlich 30 + 2 = 32.

Wir haben hier wieder eine neue Art des Niederschreibens kennengelernt, die vielleicht denjenigen, der nur oberflächlich in diesem Buche blättert, aufs neue erschrecken wird. In Wirk1ichkeit ist aber alles beim alten geblieben!

Wie war das aber bei unseren Flächenberechnungen? — Da sind doch völlig richtige Ergebnisse herausgekommen! — Ganz einfach, wir hatten nur solche F1ächen zu berechnen,

---

[1] Man lasse sich hier durch das Spiel von + und –, von Positiv und Negativ also, nicht irremachen! Denken wir daran, dass wir die „Urform" des Koordinatenkreuzes aus zwei Thermometerskalen, die mit den Nullpunkten übereinanderliegen, aufgebaut haben! Nach oben und rechts hin ist es positiv; nach unten und links hin aber negativ.

für welche die unteren Grenzen der Integrale Null waren. Der entsprechende Anteil wäre also auch dann weggefallen, wenn wir ihn nicht aus Unkenntnis schon vorher weggelassen hätten.

Und dann: Man muss zugeben, dass auch bei der Integration einer gegebenen Funktion wieder eine unbestimmbare Konstante unser bekanntes C, irgendwie mit ins Spiel kommen könnte. Wir haben dieses C bei unseren Flächenberechnungen einfach „unterschlagen". Kein großes Unglück! Denn wird ein bestimmtes, also zur Flächenberechnung in Grenzen gewiesenes Integral ausgewertet, so verschwindet die Konstante, das C, unbedingt bei der zuletzt gezeigten Subtraktion des Integralwertes der unteren Grenze von dem der oberen Grenze. Es fällt also auch mathematisch glatt weg. Insbesondere auch dann, wenn die untere Grenze Null ist. — Hier seien noch zwei Merkwürdigkeiten nachgetragen. Es gibt zunächst einen Fall, in dem unsere Integrationsformel bös versagt, nämlich bei der anscheinend so einfach liegenden Größe x^{-1}. Dieses „Loch" in der Integralrechnung hat den Mathematikern manchen Schrecken eingejagt, zumal sich schnell überlegene Stimmen erhoben, die dieses merkwürdige Unvermögen der höheren Rechenkunst gleich als „Skandal" brandmarkten und daraus den Zusammenbruch des ganzen herrlichen Gedankengebäudes voraussagten. Aber das verhängnisvolle „Loch" wurde später glänzend ausgefüllt. Es führt nämlich zum Logarithmus; denn (und das wussten die Kritiker eben noch nicht) $\int x^{-1}dx$ ist nichts anderes als der natürliche Logarithmus von x, vermehrt um die schon hinreichend bekannte Konstante C. Und gewissermaßen zum Abschied noch eine, und zwar die aller merkwürdigste Geschichte.

Wie der Leser ohne weiteres einsehen wird, gibt es Funktionen, die beim Differenzieren gewissermaßen größer oder kleiner werden, und ebenso natürlicherweise Integralwerte, die größer oder kleiner sind als die ursprünglich vorgelegte Funktion. Es ist genau so, wie es Kurven gibt, die aufwärts oder abwärts ziehen, die, von oben gesehen, etwas hohl oder erhaben gekrümmt sind, usw. Es fragt sich nun, ob es denn nicht, so wie die Gerade das Mittelding zwischen aufwärts und abwärts gekrümmt vorstellt, auch eine Funktion gibt, die sich **weder** beim **Differenzieren noch beim Integrieren** im geringsten ändert, an der also die beiden sonst allmächtigen Rechenbefehle machtlos abprallen.

Und diese Funktion, diese Kurve gibt es wirklich. Und dass sie wegen dieser Haupteigenschaft für die höhere Mathematik von geradezu grundlegender Wichtigkeit ist, braucht nicht erst lange erörtert zu werden. Sie lautet:

$$y = e^x.$$

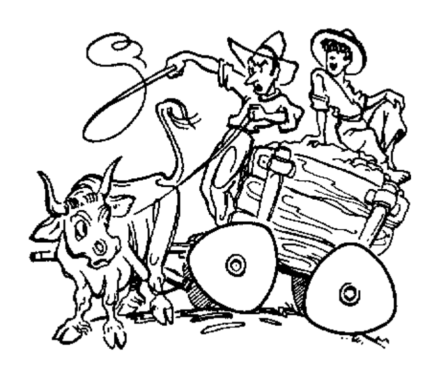
Damit sind wir wieder auf eine der drei „Berühmten" gestoßen, auf die Zahl e, die Basis des natürlichen Logarithmensystems. Wir stellen hier nur noch fest, dass es nunmehr erklärlich wird, warum man das bekannte $e = 2{,}718\,281\ldots$ geradezu als „Achse der Mathematik" bezeichnen kann.

Damit beschließen wir die Betrachtung der Differential- und Integralrechnung. Hoffentlich haben sie dem Leser gezeigt, dass auch hinter den oft unheimlich-geheimnisvoll anmutenden Rechensignalen, die wir hier kennen lernten, keine unverständliche „schwarze Magie", sondern strengster logischer Gedankengang bestimmend ist.

Hier wollen wir unseren Spaziergang in das gefürchtete Reich der höheren Mathematik abbrechen. Es wäre ein Zeichen von Selbstüberheblichkeit seitens des Verfassers, wenn er behaupten wollte, den Leser wirklich gelehrt zu haben, wie er mit höherer Mathematik umzugehen habe. Das war ja auch nicht der Zweck unseres Ausfluges! Wir wollen nur die Angst vor dieser herrlichen Gedankenkunst verlieren und uns davon überzeugen, dass die gefürch-

teten Dornen — wie so oft in der Botanik auch! — nichts als umgewandelte echte Blätter sind und dass selbst eine eingehende Beschäftigung mit ihnen keineswegs nur schmerzende Wunden erzeugen muss, wenn man nur von Anfang an gelernt hat, den scharfen Spitzen auszuweichen und wenigstens die gedanklichen Grundlagen so einfach zu nehmen, wie sie wirklich sind. Dass bei weiterem Vordringen dann der Weg steil und felsig wird, sei nicht geleugnet. Trotzdem ist er nicht unbegehbar!

Aber diesen Weg zu führen, soll und muss Aufgabe eingehenderer Werke sein.



Von einem Kreise der drei Ecken hat

Nach der etwas schwer geratenen Kost in den vorangegangenen Abschnitten hat der freundliche Leser ein gutes Recht darauf, von den ausgestandenen „mathematischen Strapazen“ ein wenig zu verschnaufen. Wir wollen also einen „Erholungsurlaub“ antreten, indem wir nach den Schrecken der Logarithmen und der Grundbegriffe der höheren Mathematik ein leicht vorstellbares geometrisches Kapitel einschalten, und zwar wollen wir uns dem altbekannten **Kreis** anvertrauen. In seiner Rundlichkeit macht er einen biederen, „gemütlichen“ Eindruck. Außerdem sind auch seine Umfangs- und Flächeninhaltsformeln geradezu lobenswert einfach und leicht merkbar. Aber da wir mit dem wahren Wesen der Mathematik schon ein wenig vertraut sind, wollen wir vorsichtiger sein, denn wir wissen, dass unser biederer Kreis von einer der drei „Geheimnisvollen“ umwittert wird. Ohne π kommen wir beim Kreis nicht weit. Dass er aber auch noch andere überraschende, wenig bekannte absonderliche Eigenschaften hat, werden wir nach und nach erfahren. Doch gehen wir den vielen und schwierigen Problemen, die mit dem Kreis zusammenhängen, vorläufig geflissentlich aus dem Wege, damit wir auch zu einer richtigen Erholung kommen.

Der Kreis ist bekanntlich jener in sich zurückkehrende Linienzug, der aus lauter Punkten besteht, die alle von einem Punkt — dem Kreismittelpunkt — denselben Abstand aufweisen. Eine Binsenweisheit, die heute jedem Schüler vertraut ist, aber wie unbekannt sind schon die ersten, unmittelbaren Folgerungen aus dieser Feststellung!

Wir „nageln“ da zunächst an: Jeder Kreis ist durch eine einzige Maßangabe, nämlich entweder durch den Durchmesser oder durch den Radius[1)] vollkommen eindeutig bestimmt. Ich kann die Aufgabe, einen Kreis mit 5 cm Radius zu ziehen, nur auf eine einzige Weise lösen. Es gibt geometrische Figuren, die sich darin dem Kreise ähnlich verhalten. Da wären z. B. das Quadrat und das gleichseitige Dreieck. Wenn ein Quadrat von 45 mm Seitenlänge konstruiert werden soll, so gibt es auch nur eine bestimmte Lösung der Aufgabe. Der Kreis ist aber allen diesen Figuren noch insoweit überlegen, als man zum Beispiel ein gleichseitiges Dreieck einmal auf eine Spitze, dann wieder auf eine Seite stellen oder ihm eine schiefe Mittellage geben kann. Beim Kreis ist das, weil er „rundherum“ völlig gleich ist, ganz gleichgültig. Also: **Der Kreis ist die durch eine einzige Zahlenangabe gewissermaßen „am vollkommensten“ gegebene Figur.**

Die unmittelbare Folge davon ist, dass es eigentlich nur **einen einzigen** Kreis gibt. Geometrisch exakter ausgedrückt heißt das: Alle Kreise sind einander „ähnlich“. Und in der

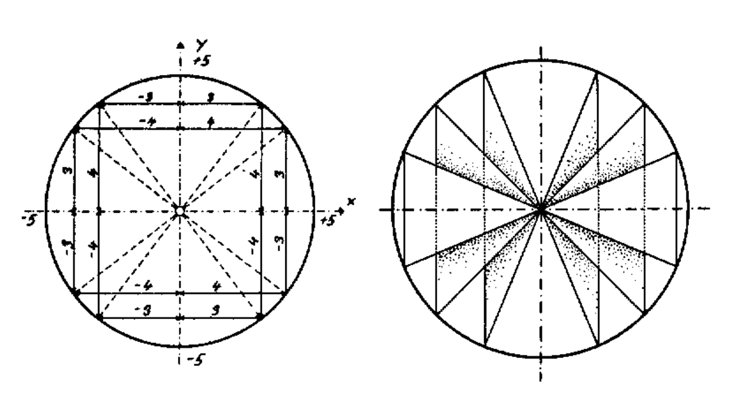
---

1) Selbst wenn ich Fläche oder Umfang angebe, ist damit der Halbmesser oder auch der Durchmesser gegeben. Auch ist die Aufgabe, einen Kreis von zum Beispiel 528 cm^2 Fläche zu zeichnen, eindeutig, wogegen man unendlich viele beliebig gestaltete Dreiecke oder Rechtecke, unregelmäßige Vielecke mit diesem Flächeninhalt zeichnen kann.

Tat, es gibt — mit Ausnahme des Punktes, der Geraden und der Kugel — keine anderen Gebilde, die einander so ähnlich sind wie zwei Kreise. Dass es aber nur einen einzigen Kreis geben soll? Dazu ein Bild: Es wäre durchaus denkbar, dass ich mir, um meinen „Bedarf“ an Kreisen fürs ganze Leben zu decken, einmal einen solchen ganz besonders schön aufzeichne und ihn dann photographiere. Hierauf trage ich den Film zum Photographen und kann jederzeit bestellen: „Heute brauche ich zwei Kreise von je 72 mm Durchmesser, für übermorgen einen von 108 cm, und so fort.“ Von dem einmal hergestellten Negativ kann mir der Photograph mit Hilfe seines Vergrößerungsapparats jeden beliebigen Kreis „liefern“, genau so, wie ich „Großväter“ in allen Größen erhalten kann, wenn ich ein Negativ des alten Herrn habe, von dem ich Bilder in Postkartengröße oder im Format 18 x 24 cm und so fort abziehen lasse. Aber alle Bilder, ob weiß oder chamois, ob hochglänzend oder rauh, ob klein oder groß, werden immer nur wieder ein und dieselbe Person, nämlich den Großvater, wiedergeben! Um wieder zur Geometrie zurückzukehren: Ähnlich sind die Kurven einander dann, wenn sie sich so ineinander einzeichnen lassen, dass der Abstand zwischen den Umrissen überall gleich bleibt. Ich kann aber — mindestens theoretisch — alle Kreise „konzentrisch“, also um einen gemeinsamen Mittelpunkt, anordnen und auf diese Weise die gestellte Forderung erfüllen. Bei beliebigen Dreiecken oder Rechtecken z. B. ist das jedoch unmöglich. Es gibt schlanke, spitze Dreiecke, dann behäbig-dickleibige, ganz flache, niedrige Rechtecke neben mehr quadrat-ähnlichen und so fort. Alle Kreise haben dagegen immer die gleiche Form! — Wir wollen uns diese, sicher vielen Lesern neuartige, Feststellung hinter die Ohren schreiben, denn wir brauchen sie noch. Jetzt werfen wir die berechtigte Frage auf, wie wohl der mathematische Ausdruck für die Kreislinie lauten mag, wie die Funktion aussieht, die aufgezeichnet einen Kreis ergibt.

Die Sache sieht zunächst schwer anfaßbar aus, vor allem deswegen, weil ja der Kreis „rundherum“ geht und wieder in sich selbst zurückkehrt. Aber bewahren wir, wie es Mathematikern geziemt, kühles Blut. Wir rufen zunächst unser vielgeplagtes Koordinaten-system zu Hilfe, in dessen Koordinatenursprung wir den Kreismittelpunkt annehmen, um dann mit dem Zirkel einen Kreis vom Radius 5 cm einzuzeichnen. Nun nehmen wir ein x von 4 cm an, gehen von da aus in die Höhe, bis wir (alles im ersten Quadranten) die Kreislinie treffen, und messen nun das dazugehörige y, also die Höhe des Punktes über der x-Achse, ab. Zu unserer Überraschung finden wir keinen schwer ablesbaren Bruch, sondern einen schönen runden, glatten Wert, nämlich 3. Voll Freude über den günstigen Ausgang dieses ersten „Kreisexperiments“ machen wir es nun umgekehrt und fangen mit $x = 3$ an. Sofort finden wir auch ein y des betreffenden Kreispunktes von 4. Wie nicht weiter erklärt zu werden braucht, muss dieser einfache Versuch auch in jedem anderen Quadranten gelingen, da sich dort, mit Ausnahme der Richtungen, ja nichts an unseren Zahlenbeziehungen geändert hat.

Wenigstens eine einfache Zahlenbeziehung haben wir also feststellen können! Allerdings müssen wir unsere Siegesfreude gleich ein wenig dämpfen. Wir haben nämlich deshalb eine Fliege totschlagen können, weil sie schon früher krepiert war und also nicht mehr wegfliegen konnte. Wie wir aus der Abbildung entnehmen können, bilden die Koordinaten der eingezeichneten Kreispunkte mit dem Kreisradius (vgl. unsere „Einheitskreisgeschichten“) stets ein **rechtwinkliges Dreieck**. —



Die Ableitung der Kreisgleichung

Da hätten wir irgendwo den auf dem Kreisumfang angenommenen Punkt. Der zu ihm hinzielende Halbmesser bildet die große Seite (Hypotenuse) des rechtwinkligen Dreiecks, während die x- und y-Linien die beiden rechtwinkligen Katheten vorstellen. Nun aber kennen wir schon das Haupt- und Grundgesetz, das jedes rechtwinklige Dreieck beherrscht. Es ist der jahrtausende alte „Pythagoras", der besagt, dass das Quadrat der längsten Seite gleich ist der Summe der Quadrate über den beiden kleinen Seiten. Und damit haben wir auch die Gleichung gefunden, der jeder Punkt auf dem Kreisumfang entsprechen muss. Sie lautet einfach: Das Quadrat der x-Strecke, vermehrt um das Quadrat der y-Strecke, muss gleich sein dem Quadrat des Radius. Also gilt:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Und die Dreiecke, die wir vorhin versuchsweise einzeichneten, waren nur die bekannten „ägyptischen" mit den Seiten 5, 4 und 3.

Aber wie kommt es dann, so wird der nachdenklichere Leser fragen, dass der Kreis durch alle **vier** Quadranten hindurchgeht? Was sagt dazu die Gleichung des Kreises?

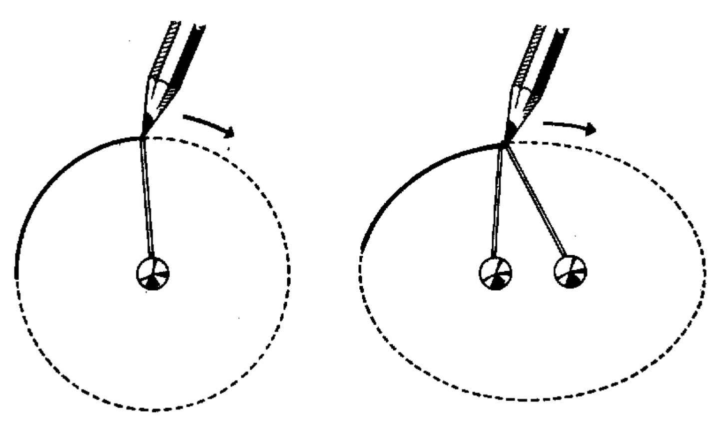
Versuchen wir, unsere Gleichung so umzumodeln, dass sie der uns geläufigen Form einer Funktionsgleichung entspricht. Wir erhalten dann:

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{r^2} - x^2 .$$

Fürs erste bestimmen wir jetzt, um bei unserem gezeichneten Beispiel zu bleiben, dass wir einen Kreisradius von 5 annehmen. Dann wählen wir x gleich + 4. Es ergibt sich zunächst $y^2 = 25 - 16 = 9$. Jetzt heißt es aber aufpassen. Es gibt nämlich **zwei** Zahlen, die miteinander multipliziert + 9 ergeben. Das sind + 3 und – 3. Also gibt es für $x = +4$ zwei Punkte; einer davon hat ein y von + 3, der andere eines von – 3. Ein Punkt liegt daher im **ersten** Quadranten, der zweite im **vierten**, unter der x-Achse!

Nehmen wir jetzt als Wert für $x = -4$ an. Wieder erhalten wir, da eben $(-4) \cdot (-4) = +16$ ergibt, dasselbe Ergebnis wie vorher. Also einem Wert von $x = -4$ entsprechen auch zwei Punkte auf dem Kreis; der eine hat $y = +3$, der andere $y - 3$. Folge davon: Da alle Punkte, die ein negatives x haben, **links** von der y-Achse, bzw. links vorn Koordinatenursprung liegen müssen, so erhalten wir wieder zwei Punkte, von denen einer im zweiten und einer im dritten Quadranten liegt. Und da das für alle beliebigen Werte gilt, die wir in die Gleichung einsetzen, so ist das Rätsel gelöst, warum der Kreis gleich durch alle vier Quadranten gehen kann.

Und nun machen wir einen Versuch, der auf den ersten Anblick recht albern aussieht. Wir lassen uns von einer befreundeten und womöglich mathematisch interessierten weiblichen Seele — Männerfinger sind meist zu ungeschickt dazu — einen Bindfaden so zurechtschlingen, dass er, wie die Abbildung zeigt, in zwei Schlingen ausläuft. Der Faden kann etwa 12 bis 15 cm



Schnurzirkel für Kreis und Ellipse

lang sein. Nun stecken wir den Stift eines Reißnagels durch diese beiden Endschlingen und heften den Reißnagel in die Mitte unseres Zeichenpapiers auf das Reißbrett. Wenn wir jetzt einen gespitzten Bleistift zwischen die beiden Schlingen einführen und, den Bindfaden anspannend und umfahrend, eine Linie ziehen, so entsteht natürlich ein Kreis; denn der mit Hilfe des Reißnagels „angepf1ockte“ Bindfaden stellt jetzt den unveränderlichen Radius dar, so dass die von der Bleistiftspitze gezogene Linie überall gleichen Abstand von dem als Mittelpunkt dienenden Reißnagel hat. Wir haben eben einen einfachen „Schnurzirkel“ hergestellt, wie ihn in größerem Maßstab die Gärtner verwenden. Diesen Schnurzirkel wollen wir uns gut aufheben, denn wir brauchen ihn noch zu allerlei interessanten Versuchen, bei denen jeder andere Zirkel versagen würde.

Wir nehmen jetzt einen **zweiten** Reißnagel zu Hilfe, um dessen Stift wir eine der beiden Endschlingen legen. Dann stecken wir den Nagel neben den ersten wieder ins Reißbrett. Was damit erzielt wird, ist auf den ersten Blick klar: Wir haben einen „Kreis“ mit zwei Mittelpunkten zu konstruieren begonnen. Und tatsächlich erhalten wir, wenn wir wie vorhin mit dem Bleistift die Reißnägel umfahren, ein kreisähnliches Gebilde, das sich jedoch von einem richtigen Kreis unterscheidet: Es ist nämlich nach einer Richtung hin, sagen wir in der x-Richtung, länger als in der anderen, in der y-Richtung. Der Kreis ist „schmaler“ geworden“ oder, wie ein Witzbold einmal sagte, ein Kreis, der eine Entfettungskur hinter sich hat. Die Haupteigenschaft der entstandenen Figur ist leicht zu erkennen. Beim echten Kreis hatten alle Kreisumfangspunkte **dieselbe Entfernung** vom Mittelpunkt. Das ist hier anders geworden, und zwar auf ganz eigentümliche Weise: Unsere Schnur, deren beide Enden von den Reißnägeln „angepflockt“ sind, hat nämlich ihre Länge **beibehalten**. Das ist die wichtigste Tatsache, die auch nicht durch den Befund getrübt werden kann, dass Halb- und Durchmesser des entstandenen Gebildes überall verschieden groß sind. Wir dürfen hier also nicht mehr von „gleichen Entfernungen“ sprechen. Dafür bleibt etwas anderes gleich, nämlich die **Summe** der **Entfernungen**, und zwar die der — immer gleichbleibenden — Fadenlänge entsprechende Summe der Abstände von den zwei Reißnagelpunkten zu irgendeinem Punkte des Umfanges. Unsere Kurve ist also der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, deren Summe der Abstände von zwei anderen (nicht auf der Kurve gelegenen) Punkten immer gleich ist.

Man müsste, falls dies üblich wäre, diese so entstandene, dem Kreis offensichtlich nahe verwandte, Kurve auf gut deutsch — den **Mangel** nennen; denn der heute allgemein gebräuchliche Name unseres Gebildes ist griechisch und heißt **Ellipse**, was Mangel bedeutet. Wir haben also mit unseren Zwirnsfäden eine Ellipse konstruiert.

Sehen wir uns die Ellipse einmal genauer an.

Sie ist — die Entstehung der Ellipse mit Hilfe unseres Fadens und zweier Reißnägel läßt es erkennen — nichts anderes als ein „in die Länge gezogener“ Kreis oder, was auf dasselbe herauskommt, ein Kreis, der in einer Richtung gleich breit geblieben ist, in der anderen dazu senkrechten Richtung jedoch eingedrückt wurde. Wir haben jetzt nicht mehr einen einzigen Durchmesser, sondern deren unendlich viele, von denen uns zwei ganz besonders interessieren: der größte und der kleinste. Der größte liegt bei uns genau in der waagerechten x-Achse, der kleinste geht durch die Mitte der Ellipse von oben nach unten quer durch. Es ist klar, dass diese beiden Durchmesser nicht nur die Größe, sondern auch die Gestalt der Ellipse bestimmen werden. Mache ich diese beiden Durchmesser — man nennt sie meist „Achsen“ — ziemlich gleich, so wird die Ellipse „rundlich“ sein. Nehme ich die beiden Achsen dagegen verschieden groß an, etwa die große 10 cm und die kleine 2 mm — um gleich einen besonders krassen Fall zu betrachten —, so wird die Ellipse lang, flach und schmal. Wir merken uns hier

gleich: Es sind also **zwei** Größen, die Aussehen und Gestalt einer Ellipse bestimmen, nämlich die Länge der beiden Achsen. Wir haben also nicht mehr nur eine einzige Größe, wie es etwa beim Kreis der Durchmesser, beim gleichseitigen Dreieck oder beim Quadrat die Seitenlänge ist, welche die Form bestimmt. Die unmittelbare Folge davon ist, dass nicht alle Ellipsen einander „ähnlich" sind; es gibt eine unendliche Menge verschieden gestalteter Ellipsen. Also wohlgemerkt: Es gibt **den** Kreis, aber **die** Ellipsen!

Mit der Ableitung der mathematischen Formel für die Ellipse wollen wir den Leser, dem wir in den vorhergehenden Abschnitten so hart zugesetzt haben, nicht weiter plagen. Die Ellipsengleichung lautet (in ihrer einfachsten und zumeist gebräuchlichen Form) einfach:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

wobei a und b die beiden **halben** Achsen bedeuten. Es ist klar, dass im Falle $a = b$ die Gleichung die Form annimmt:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

woraus sich unschwer durch Multiplikation das b^2 auf die andere Seite bringen lässt. Man erhält dann die Gleichung $x^2 + y^2 = b^2$. Das besagt, dass wir auf einen Kreis gestoßen sind, dessen Radius b groß ist. Nun noch von zwei „Geheimnissen" der Ellipse: Die Formel für den Flächeninhalt des Kreises lautet, wenn wir mit F die Fläche bezeichnen, $F = r^2 \pi$. Die Fläche der Ellipse sieht ganz ähnlich aus:

$$F = a \cdot b \cdot \pi.$$

Also eine „Familienähnlichkeit", wie sie einfacher überhaupt nicht gedacht werden kann. Leider zeigt die Umfangsberechnung, dass unsere Ellipse, die sich ja zum Kreis wirklich beinahe so verhält wie eine magere Schwester zu ihrem dicken Bruder, ein hinterlistig-heimtückisches Ding ist.

Wir vermögen nämlich den Umfang der Ellipse **überhaupt nicht** mathematisch exakt anzugeben, und zwar kommt man bei dieser so einfach erscheinenden Berechnung auf das berüchtigte „elliptische Integral" das, wie es fachwissenschaftlich heißt, „elementar nicht mehr auswertbar" ist. Wir können also nicht angeben, wie groß haargenau und exakt der Umfang einer bestimmten Ellipse ist. Allerdings besitzen wir feinst berechnete Näherungsverfahren, mit deren Hilfe wir jede beliebige Genauigkeit erreichen, aber ganz so einfach und messerscharf wie beim Kreis geht es nicht.

Das zweite Geheimnis der Ellipse ist eigentlich auch ein Geheimnis des Kreises. Wir stellen nämlich — etwas unvermittelt, aber wohl-berechtigt — die Frage: Wann sehen wir den Kreis wirklich als solchen? Die Antwort lautet überraschenderweise: So gut wie nie! Wir sehen ihn stets nur in Ellipsenform! Nur dann, wenn sich unser Auge genau in einer Senkrechten befindet, die wir im Mittelpunkt des Kreises auf seiner Fläche errichten, sehen wir den Kreis wirklich in allen Teilen unverkürzt, sehen wir alle seine Durchmesser gleich groß. Sobald wir unsere Blickrichtung nur ein wenig neigen, wird er schon zur Ellipse.

Wer hätte gedacht, dass unser biederer Kreis so empfindlich sei und sich überhaupt nicht „schief ansehen" lasse? Der Beweis für diese Tatsache führt uns auf eine höchst wichtige

Erscheinung, nämlich auf das wahre und grundlegende Verwandtschaftsverhältnis, das zwischen Kreis, Ellipse und anderen Figuren besteht.

Die Sache ist so: Blicke ich senkrecht auf eine Kreisfläche, dann bilden die Sehstrahlen vom Auge zu den Punkten der Kreislinie einen sogenannten geraden Kreiskegel. Und dieser Kegel ist es, der das Kunststück fertig bringt, aus einem Kreis eine Ellipse zu machen.

Geometrisch ist der Kegel ein interessantes Gebilde. Seine gekrümmte Oberfläche besteht aus lauter geraden Linien. Denken wir an die Sehstrahlen, so wird es sonnenklar, warum man diese Geraden, die strahlenförmig von der Kegelspitze ausgehen, die „Erzeugenden" des Kegels nennt.

Wie steht es nun mit dieser Verwandtschaft zwischen Kreis und Ellipse?

Man braucht, um das praktisch zu erproben, nur einen Rettich zu betrachten, der annähernd kegelförmig und möglichst drehrund gewachsen ist. Schneide ich ihn quer zu seiner „Achse", also in der Hauptrichtung seines Wachstums, so gibt's einen Kreis. Sowie ich aber den Schnitt schief führe, erhalte ich eine Ellipse. Das trifft übrigens auch beim Kreiszylinder zu. Man vergleiche nur: Die quer durchgeschnittene Wurst ergibt einen Kreis; die, wie üblich, schief geschnittene aber mehr oder weniger genaue Ellipsen. Der Kreiszylinder kann **nur** nach dem Kreis oder nach Ellipsen (oder im Grenzfall nach Rechtecken) geschnitten werden.

Merken wir uns noch, dass Ellipse und Kreis den „geschnittenen" Kegel in **allen** seinen Erzeugenden schneiden. Das heißt, es werden restlos alle Seitengeraden, die wir uns in dem Kegelmantel von der Spitze aus gezogen denken, bei einem Schnitt, der als Schnittfigur Kreis oder Ellipse erzeugt, durchgeschnitten.

Und nun machen wir, wenigstens in Gedanken, ein neues Experiment mit unseren vorhin erwähnten Reißnägeln. Sie waren etwa 2 bis 3 cm weit voneinander entfernt. Wir ziehen nun einen, etwa den rechten, heraus und denken ihn uns erst wieder jenseits aller Unendlichkeit, also immer und immer noch weiter als die größten uns bekannten Weltenfernen, in unser gleichermaßen unermesslich lang gewordenes Reißbrett in der Verlängerung der waagerechten x-Achse eingesteckt. Mit unserem Fadenziehen kommen wir dabei natürlich nicht zum Ziel. Denn so viel Zwirn gibt es auf der ganzen Welt nicht, um zu diesem zweiten Punkt zu kommen. Zum Glück brauchen wir aber den Faden überhaupt nicht mehr. Denn die Parallele zur x-Achse ersetzt uns genau die Richtung zu dem nun in unendlicher Weite gedachten zweiten Reißnagel. Es fragt sich nur, was wir mit dieser „Verbannung" unseres zweiten bei der Ellipse so wichtigen Punktes angerichtet haben.

Das ist nicht schwer zu beurteilen. Als wir vorhin statt des einen Reißnagels im Kreismittelpunkt deren zwei nebeneinander in endlich-bequemer Entfernung ins Reißbrett steckten, zogen wir den Kreis ein wenig auseinander und erhielten dadurch die Ellipse. Jetzt haben wir das vorhin Begonnene einfach ins Unendliche erweitert und unseren armen Kreis über alle Weltenfernen und Milchstraßenweiten hinaus auseinandergezerrt. Vor uns liegt also dadurch das Endstück einer Ellipse, deren weitaus größter Teil sich irgendwo im Weltraum verliert. Wir haben eine Ellipse vor uns, deren beide Achsen unendlich groß geworden sind.

Die Geschichte sieht auf den ersten Blick unbehaglich aus; denn wir sind damit einer unvorstellbaren Größe ins Gehege gekommen, nämlich der Unendlichkeit. So verlockend es nun wäre, das hier auftauchende Problem weiterzuverfolgen und dadurch Einblicke zu gewinnen, die zu den wichtigsten im weiten Reiche der Mathematik und Geometrie überhaupt

gehören, wollen wir dem Leser in knappen Schlagworten doch nur das Allerwichtigste verraten. Diese unendlich langgezogene Ellipse stellt eine ganz bestimmte Kurve dar, nämlich die „Gleichheit“. Wie man sie konstruiert und auf die Ableitung ihrer Formel kommt, würde erst längere Zwischenerklärungen erfordern. Wir merken uns daher nur, dass wir diese „Gleichheit“ benannte Kurve, und zwar ihre einfachste und wichtigste Form, schon kennen; es ist die **Parabel**. Ihre Formel lautet in der einfachsten Fassung:

$$y = x^2.$$

Und genau so wie die Ellipse ist auch die Parabel eine nahe Verwandte des Kreises, Ein beachtenswerter Unterschied zwischen den beiden scheint aber doch auf: Beim Kreis, der ja nur ein Sonderfall der Ellipse ist, spielt das berühmte π eine große Rolle, bei der Parabel jedoch nicht! Ihr Flächeninhalt — da sie unendlich ist, sind nur endliche Teilstücke erfassbar — lässt sich ohne Hilfe dieser transzendenten Zahl direkt angeben. Weiter: Alle Parabeln haben die gleiche Form. Allgemein lautet die Gleichung der Parabel $y^2 = 2\ px$. Woraus ersichtlich ist, dass wir hier wieder nur eine einzige willkürlich wählbare Größe haben, nämlich das p, den sogenannten Parameter der Parabel. Alle Kurven, die wir nach der Parabelgleichung zeichnen, sind demnach einander ähnlich, so dass wir also nur eine einzige Parabel kennen[1)].

Nun noch schnell zur Parabel als Kegelschnitt. Man erhält sie, wenn man einen Kegel so schneidet, dass die entstehende Schnittfläche parallel zu einer Erzeugenden des Kegelmantels dahinzieht. Diese Erzeugende ist ferner die einzige Gerade des Kegelmantels, die von dem Parabelschnitt niemals durchschnitten wird, selbst dann nicht, wenn wir Kegel und Schnittfläche ins Unendliche vergrößern.

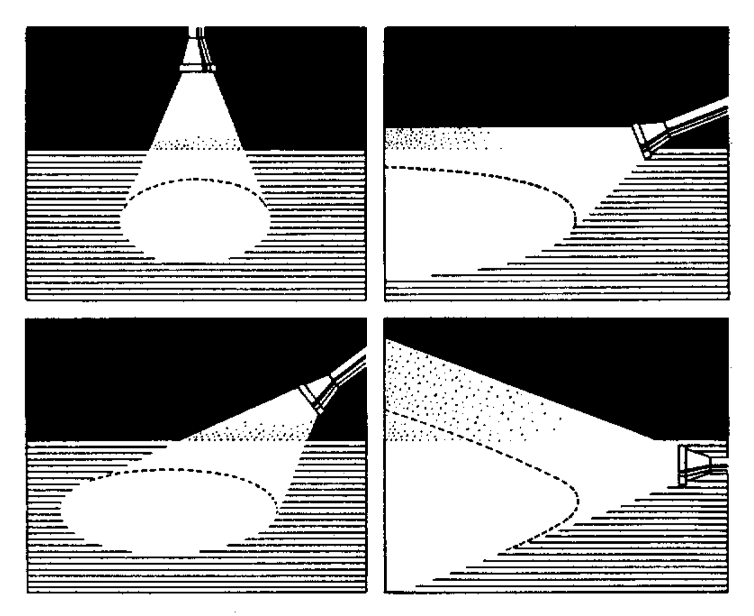
Noch einen Schritt weiter: Führen wir den Schnitt so, dass die Schnittebene mit der Achse des Kegels parallel läuft, so erhalten wir eine Fläche, die von einer Kurve begrenzt ist, die noch steiler und eleganter als die Parabel dahinzieht. Sie heißt „der Überfluss“ oder die Hyperbel, eine ganz merkwürdige Kurve, mathematisch geradezu die Zwillingsschwester der Ellipse, lediglich durch ein Minuszeichen vor einem Gleichungsglied von dieser verschieden. Aber dieses Minuszeichen wirkt hier geradezu wie schwarze Magie. Wir sagten vorhin, dass die sogenannte kleine Achse der unendlich lang geratenen Parabel im Unendlichen liege und unendlich groß sei. Damit ist sie unserem Zugriff entrückt. Aber noch viel weniger greifbar ist die kleine Achse der Hyperbel, denn sie ist dank der verhängnisvollen Rolle des erwähnten Minuszeichens[2)] in das Gespensterreich des Imaginären entwischt. Was an der Hyperbel noch verwirrt, ist die Tatsache, dass diese Kurve **zwei** Äste hat. Sie rühren daher, dass auch ein Doppelkegel, der sich über seine Spitze hinaus weiter verlängert und verbreitert, von der Schnittebene ebenfalls getroffen wird. Und mit der Hervorhebung der Tatsache, dass die

---

[1)] Wie wir in einem vorhergehenden Kapitel sahen, zog die Kurve $y = x^2$ sehr steil in die Höhe. Um das zu verringern, setzten wir dort $y = \frac{1}{2} x^2$. Dadurch wurde die Kurve flacher; sie würde noch flacher werden, wenn wir etwa $y = 0{,}01\ x^2$ setzten. In Wirklichkeit hat sich dabei an der Kurve selbst gar nichts geändert! Wir haben nur ein kleineres Stück aus ihr vergrößert aufgezeichnet. Genau das gleiche erzielen wir, wenn wir etwa ein kleines Teilstück der Kurve $y = x^2$ photographieren und nach dem erhaltenen Negativ eine Vergrößerung herstellen lassen. Die Verhältnisse liegen hier also genau so wie beim Kreis. — Die oft erwähnte „kubische Parabel“ $y = x^3$ zeigt als Kurve dritten Grades (so genannt, weil eine Veränderliche in ihrer Gleichung in dritter Potenz vorkommt) mit der echten Parabel, die ein Kegelschnitt ist, nur gleichsam eine äußere Ähnlichkeit, keine innere Verwandtschaft.

[2)] Die Hyperbelgleichung lautet (in der üblichen Form): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Wie man sieht, stimmt sie bis auf das Minuszeichen mit der Gleichung der Ellipse überein.

Hyperbel, obwohl sie gleich zwei Kegel trifft, im ganzen **zwei** Gerade der Kegelmäntel nie schneidet, wollen wir unseren Eilmarsch durch das Gebiet der Kegelschnitte beschließen. Dazu wollen wir noch, gleichsam als Entschädigung für die flüchtige Besprechung eines der prächtigsten Kapitel, dem Leser ein Rezept zur vereinfachten Herstellung von Kegelschnitten

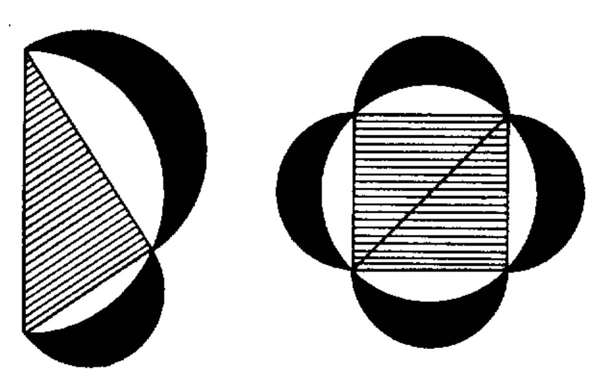


Wir „erzeugen" Kegelschnitte mit einer Taschenlampe

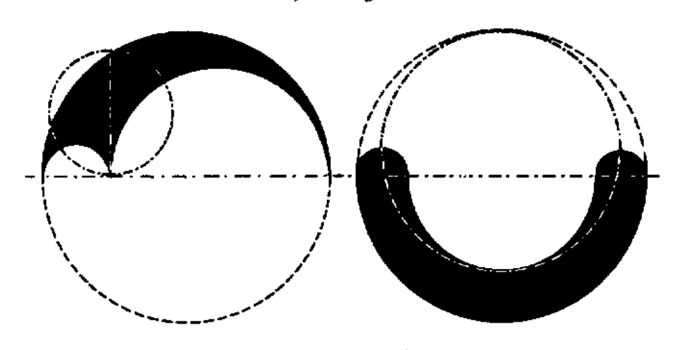
verraten, nämlich mit optischen Mitteln. Und zwar fällt bei manchen stabförmigen Taschenlampen (sogenannten Stablampen) das Licht in einem ziemlich genauen Kreiskegel aus dem Lampen- bzw. Spiegelgehäuse. Strahlt man mit einer solchen Lampe eine ebene weiße Fläche an, etwa eine Wand oder ein Blatt Papier, so sieht man darauf deutlich Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel entstehen, je nach der Neigung der Lampe zum Papier, bzw. dem Winkel unter dem der Lichtkegel von der Ebene geschnitten wird.

Und nun zurück zu unserem Kreis. Man könnte einen Roman über die Mühen und Geistesnöte schreiben, die es die Menschheit kostete, bis sie hinter das eigentliche Geheimnis des Kreises, nämlich hinter die wahre Größe der Zahl π, gekommen ist. Im ältesten erhaltenen ägyptischen Mathematikwerk, dem berühmten Papyrus Rhind des Schreibers Achmes, findet sich ein Wert für π, der überraschend genau ist, und zwar nahmen die alten Ägypter den Bruch $\frac{16}{9}$ zum Quadrat erhoben für π. Das ergibt $\frac{256}{81}$ oder in Dezimalen 3,160 493 827. Später muss dieses Wissen wieder verlorengegangen sein, denn es ist erwiesen, dass sich selbst die Ägypter bei größeren kreisförmigen Bauten mit der rohen Annäherung drei für π begnügten. Erst die hellsichtigen Griechen rechneten gründlicher. Archimedes kam auf die Näherungswerte $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{1}{7}$. Die Zahl π exakt darzustellen, blieb auch den mathematisch so stark begabten Hellenen versagt. Wie wir schon wissen, kam erst im 17. Jahrhundert Licht in die ganze verzwickte Angelegenheit. Dafür gelang es den schlauen Griechen, das heiß umkämpfte Problem der Flächeninhaltsberechnung von Kreisfiguren auf einem genialen Umweg wenigstens teilweise und völlig exakt zu lösen. — Wie ein guter Roman, so muss auch die Geschichte der Zahl π ihre Überraschungen haben, und zwar kam man hier auf das sogenannte „Kreiszweieck". Mit Geraden kann man (dies gilt aber nur in der Ebene) kein Zweieck begrenzen, man muss mindestens drei Ecken, drei Seiten haben. Mit Kreisbogen aber geht es. Von dieser Erkenntnis ausgehend, soll Hippokrates schon im fünften vorchristlichen Jahrhundert seine berühmten und nach ihm benannten „Möndchen", die

„lunulae Hippocratis“ gefunden haben. Sie entstehen in einem rechtwinkligen Dreieck dadurch, dass man zunächst über der Hypotenuse einen Halbkreis um das Dreieck zieht und dann über jeder Kathete jeweils mit der Länge der halben Kathete als Radius wieder einen



„Die Möndchen des Hippokrates"
Die schraffierte Fläche ist jeweils gleich den schwarzen Flächen



„Arbelos" und „salinon"
Die schwarze Fläche ist jeweils flächengleich dem strichpunktierten Kreis

Halbkreis schlägt. Der Flächeninhalt der so entstehenden „Möndchen“ ist dann flächengleich mit dem Dreieck. Natürlich verhält es sich bei einem ebenso behandelten Quadrat ähnlich; auch da sind die Flächeninhalte der „Möndchen“ gleich dem Quadratinhalt. Der Beweis dafür geht vom pythagoreischen Lehrsatz sowie von der Tatsache aus, dass sich die Flächeninhalte zweier Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten

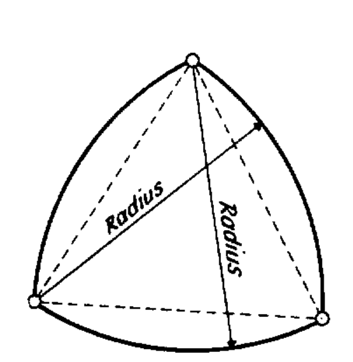
Die ganze Angelegenheit ist trotz ihrer Einfachheit einigermaßen verwickelt; aber mit Hilfe der erwähnten „Möndchen“ sind wir seit fast zweieinhalb Jahrtausenden imstande, mit Zirkel und Lineal Rechtecke oder Quadrate zu konstruieren, die von Kreisbogen begrenzten Figuren exakt flächengleich sind. Dagegen weiß man aber, dass die Quadratur des Kreises überhaupt, also die Konstruktion eines Quadrates oder Rechteckes, das mit einem gegebenen Kreis flächeng1eich ist, mit Zirkel und Lineal unmöglich ist. Die Transzendenz der Zahl π verbietet das.

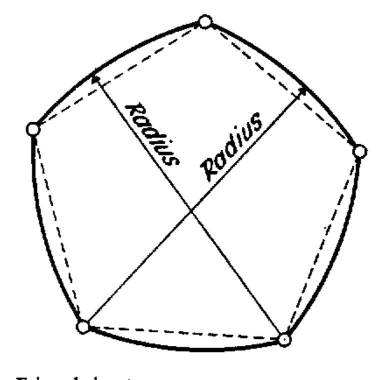
Natürlich haben sich die alten Griechen auch im übrigen viel mit Figuren beschäftigt, die aus Kreisbogen zusammengesetzt sind. Zwei derartige Figuren, die Archimedes, der größte Mathematiker des griechischen Altertums, gefunden haben soll, haben wir abgebildet. Es sind der „Schusterkneif“ (arbelos) und das „Salzfass“ (salinon). Schon damals wusste man, dass die Flächenberechnung derart merkwürdig begrenzter Figuren nicht sehr schwer sein könnte, wenn man nur hinter das Geheimnis der exakten Kreisflächenberechnung käme, denn es war bekannt, dass die eingezeichneten feinen Kreise flächengleich mit der ganzen Figur sein müssten.

Zum Schluss unseres „Erholungsur1aubs“ wollen wir den Leser mit einer Tatsache bekannt machen, die auf den ersten Blick wie ein mathematischer „Kalauer“ anmutet, wäre das überraschendwidersinnig scheinende Ergebnis streng mathematisch aufgefasst, nicht auch, hieb- und stichfest, wobei es sich nebenbei erweist, wie außerordentlich vorsichtig man beim sogenannten Definieren, das heißt beim „Begriffsbestimmen“ vorgehen muss, soll man sich nicht später über das Festgestellte selber „Arme und Beine brechen“. Gerade beim Kreis gibt es eine heimtückische Falle, und das Verblüffende dabei ist, dass man erst seit etwas mehr als hundert Jahren überhaupt davon etwas weiß.

Der gute Euklid, der „Vater der Geometrie“ — wir hören noch von ihm —, war ein sehr vorsichtiger und außerordentlich geschickter „Begriffsbestimmer“. Er definierte um rund 300 vor Chr. den Kreis als ebene Figur, die von einer Linie mit folgenden Eigenschaften begrenzt wird: „Alle von einem im Innern der Figur gegebenen Punkt zu den Punkten der Linie gezogenen Strecken sind gleich.“ Worauf sich hier der Grieche stützt, ist klar: auf die Gleichheit der **Halbmesser**. Praktisch ziehen und konstruieren wir ja auch heute noch den Kreis so, dass wir von der Halbmessergleichheit ausgehen. jeder Zirkel fasst nur den Halbmesser des Kreises; auch wenn wir den Schnurzirkel verwenden, setzen wir immer die Gleichheit der Radien voraus.

Aus der Gleichheit der Radien folgt aber unweigerlich die Gleichheit sämtlicher **Durchmesser** beim Kreise. Es lässt sich scheinbar auch nichts dagegen einwenden, den Kreis als „ebene Figur zu bezeichnen, die überall die gleiche Breite aufweist“. Der Kreis ist — volkstümlich gesprochen — überall „gleich dick“. Sehen wir uns das einmal praktisch an, wobei wir ins Körperliche übergehen und Kreiszylinder und Prismen, die ein Vieleck zur Basis haben, ins Auge fassen wollen. Wir legen zum Beispiel unter ein Buch zwei runde Bleistifte. Auf ihnen lässt sich das Buch leicht und widerstandslos hin und her rollen, als ob es Räder bekommen hätte. Sobald man aber zwei Bleistifte mit achteckigem Querschnitt nimmt, klappt es schon nicht mehr so gut. Man stößt auf Widerstände, und sieht man genauer hin, so wird man unschwer erkennen, dass das Buch bei einem derartigen Fortrollen auf und ab zittert; es wird fortwährend gehoben und sinkt dann wieder. Warum? Aus dem einfachen Grunde, weil das Achteck nicht überall „gleich dick“ ist; sein Durchmesser, über die Ecken gerechnet, ist größer als von Seite zu gegenüberliegender Seite. Unser Buch muss daher ebenso wie ein Wagen schaukeln und wackeln, der statt kreisförmiger Räder elliptische oder eckige hätte. Noch schwieriger aber wird es bei sechskantigen Bleistiften, und wenn wir gar Holzleisten mit Dreieckquerschnitt unterlegen, lässt das Buch sich überhaupt nicht mehr hin und her rollen.





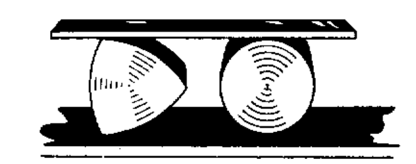
„Kreise“, die Ecken haben!

Und nun kommt die seltsam-wunderliche Überraschung: Bis zum Jahre 1875 — also länger als 2000 Jahre seit der ersten uns bekannten richtigen Kreisdefinition durch Euklid — galt der Kreis auch im Bereich der strengsten Mathematik als tatsächlich einzige Figur, die überall gleiche Breite aufweist. So lange war also auch die Begriffsbestimmung „Ein Kreis ist eine ebene Figur, die überall gleich dick ist“ vollkommen richtig, denn man kannte kein anderes Gebilde, das diese Forderung erfüllen konnte. In dem genannten Jahr aber fand der Mathematiker **Reuleaux** , dass es noch andere Figuren gibt, die zwar überall die gleiche

Breite aufweisen, ohne jedoch Kreise im alten überlieferten Sinne zu sein. Damit war die Unrichtigkeit der erwähnten Breiten-Definition des Kreises erwiesen.

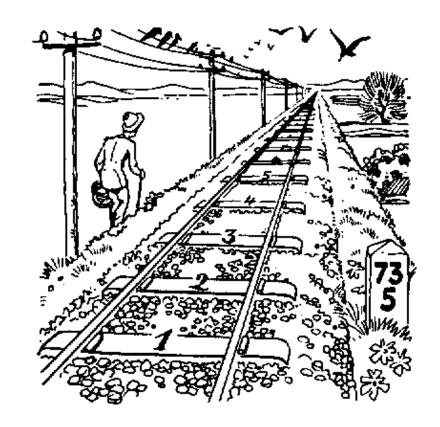
Die einfachste dieser Reuleauxschen Figuren mit gleicher Breite kann man sich aus dem gleichseitigen Dreieck entstanden denken. Wir nehmen zunächst einmal einen Kreis, dessen Umfang wir auf die bekannte Weise durch Auftragen des Radius als Sehne in sechs gleiche Teile teilen. Jeder zweite dieser Punkte ist dann der Endpunkt eines gleichseitigen Dreiecks. Nun stechen wir den Zirkel in einen Eckpunkt, wogegen die Bleistiftspitze bis zur nächsten Ecke greift. Dann schlagen wir den Kreis; und das machen wir ebenso bei den beiden anderen Eckpunkten. Dadurch entsteht ein Dreieck, dessen Seiten von Kreisbogenstücken begrenzt sind. Diese Figur hat, wie eine kurze Überlegung sofort klarmacht, tatsächlich überall gleiche Breite! Denn von einer der Kreisbogenseiten bis zur gegenüberliegenden Ecke ist es immer gleich weit, und sind wir beim Eckpunkt angelangt, so ist es von diesem bis zu jedem Punkt der gegenüberliegenden Bogenseite auch wieder gleich weit! Auf diese Weise kann man jedes Vieleck mit ungerader Eckenzahl (Fünfeck, Siebeneck und so fort) in eine überall gleichbreite Reuleauxsche Figur umzeichnen.

Gibt man einem Zylinder als Querschnitt die Form einer solchen Reuleauxschen Figur, so lassen sich auf der entstandenen Walze Bücher, Bretter und andere Lasten genau so reibungslos weiterrollen wie auf einer kreisrunden Zylinderwalze. Es gibt also überraschenderweise doch „Kreise“, die drei, fünf, sieben und so fort Ecken haben! Eine wundersame Erkenntnis, die sogar im Reiche der strengen Mathematik Erstaunen auslöste.



Es „funktioniert" auch mit dem dreieckigen „Kreis"

Natürlich eignen sich die Reuleauxschen Figuren nur zu Walzen, niemals zu Rädern; denn beim Rad ist die Forderung nach überall gleichem Halbmesser die Hauptbedingung.. Diese erfüllen die genannten Figuren natürlich nicht, da es in ihnen keinen Punkt gibt und geben kann, der von allen Punkten des Umfangs gleiche Entfernung aufweist.



Kampf gegen die Unendlichkeit

Was eine Begriffsbestimmung, eine Definition alles kann, haben wir soeben an einem beinahe lustigen Beispiel gesehen. jetzt wollen wir uns gleichfalls mit Hilfe einer „Definition“ an das Ungeheuer Unendlichkeit heranwagen. Es ist bezeichnend für die Schwierigkeit, diesen Begriff in Worten auszudrücken, dass wir das „Gefecht“ gleich mit mehreren Definitionen eröffnen können. „Unendlich ist, was nicht zu Ende gedacht werden kann, von dem keine Grenzen eingesehen werden können“, so etwa sagen die Philosophen. „Unendlich ist eine Größe, wenn sie größer ist als jede noch so große vorgegebene Zahl!“ — so drücken sich die Mathematiker aus. Mehr oder weniger geistreiche und treffende Definitionen ließen sich noch in Masse anführen, denn „gerade wo Begriffe fehlen, da stellt ein Wort zur rechten Zeit sich ein“, könnte man mit Mephisto höhnen. Doch sehen wir nach, was wir mit der Definition angerichtet haben.

Die erste Folgerung ist die, dass die vier elementaren Rechenoperationen, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ohnmächtig abgleiten an diesem „Unendlich“.

Unendlich, um eine noch so große Zahl vergrößert, kann eben nicht größer werden; ebenso nicht kleiner, wenn man ein noch so gigantisches, endliches Quintillionenmonstrum davon abzieht. Genau so kann die Multiplikation Unendlich nicht größer machen, als es ohnehin schon ist, und auch alle Dividiererei wäre Unsinn. Natürlich wirft das alle unsere Vorstellungen und Denkgesetze völlig um. Dazu ein Beispiel, das trotz seines scheinbar krassen Widersinnes unangreifbar richtig ist. Wir sprechen von der Unendlichkeit der Zeit, der Ewigkeit. Wenn ich von dieser Sekunde, also von der Gegenwart an bis in alle Ewigkeit weiterzähle, so komme ich mit dem Zählen genau so weit, als wenn ich damit vor aller Ewigkeit schon, in fernster Vergangenheit, begonnen hätte.

Wie ein lähmender Alpdruck lastete seit grauer Vorzeit, seitdem die Inder den Begriff der Unendlichkeit gefunden haben, die Vorstellung des Unendlichen auf dem Denken der Menschheit. Denn wie eine Straßenwalze eine zufällig auf dem Wege liegende Nuss-Schale förmlich zu nichts zermalmt, so zerschmettert jeder Denkversuch, Unendliches oder Ewiges fassen zu wollen, unser gesamtes geistiges Rüstzeug. Da ist es kein Wunder, dass gerade unter den Großen, die wir als beste Lehrer der Menschheit verehren, viele warnend ihre Stimme gegen die Annahme der Unendlichkeit überhaupt erhoben. Schon **Aristoteles** lehrte, dass keinerlei vollendetes Unendliches möglich sei. **Descartes** lehnte ausdrücklich jede Beschäftigung mit dem Unendlichen ab. **C. F. Gauß** wandte sich 1831 gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer vollendeten, was in der Mathematik niemals erlaubt sein dürfte — kurz, die Menschheit streckte die Waffen vor dem ihr fürchterlichen, unvorstellbaren Ungeheuer Unendlichkeit.

Trotzdem gelang es, den scheinbar unfassbaren Koloss Unendlichkeit doch zu packen, und zwar mit der Mengenlehre. Sie ist im letzten Drittel des vorigen Jahrhunderts entstanden, ihr großartigster Kopf war **G. Cantor**.

Wie so viele großartige Erkenntnisse, geht auch der erste und wichtigste Grundgedanke dieser Mengenlehre von einer ganz einfachen Tatsache aus, so dass man nicht mit Unrecht die wichtigste Waffe der Unendlichkeitsforschung mit der Rückkehr zu den allereinfachsten Rechenkünsten, nämlich zum Finger- und Zehenrechnen unserer Kinder und der Naturvölker, vergleichen kann. Zuerst musste eine Gedankenbrücke in das unheimliche Reich des Unendlichen geschlagen werden, auf der man dem Ungeheuer Unendlichkeit auf den Leib rücken konnte; denn wie wir schon sagten: Unendlich wird durch das Hinzuzählen oder Abziehen noch so großer endlicher Zahlen nicht verändert, sondern weder größer noch kleiner, ebenso wie Potenzieren und Wurzelziehen, Logarithmieren, Differenzieren usw. nur ihre eigene Ohnmacht kundtun, wenn man sie an Unendlichem erproben wollte.

Nach dem Gesagten klingt es fast wie ein schlechter Witz, wenn man die kindliche Rechenoperation erfährt, mit der man dann weiterkam. Sie besteht im sogenannten „**Zuordnen**“. Angenommen, es säße zum Beispiel irgendwo im afrikanischen Busch ein biederer Hottentotte, wohlerfahren darin, wie man den grimmigen Löwen und das fürchterliche Nashorn jagt, aber in Kopfrechnen vollkommen „untendurch“; denn nicht einmal zählen kann unser schwarzer Gentleman.

Nun hat er aber einen Haufen Kokosnüsse und einen kleineren von Datteln ergattert. Er möchte gern wissen, wovon er mehr hat. Das festzustellen, ist natürlich für sein Können eine schier unlösbare Aufgabe. Da kommt ihm das „Zuordnen“ zu Hilfe. Er legt zu jeder Nuss eine Dattel. Ist er mit diesem Zuordnen fertig, so weiß er untrüglich, ob er mehr Datteln oder Nüsse oder gleichviel von beiden hat.

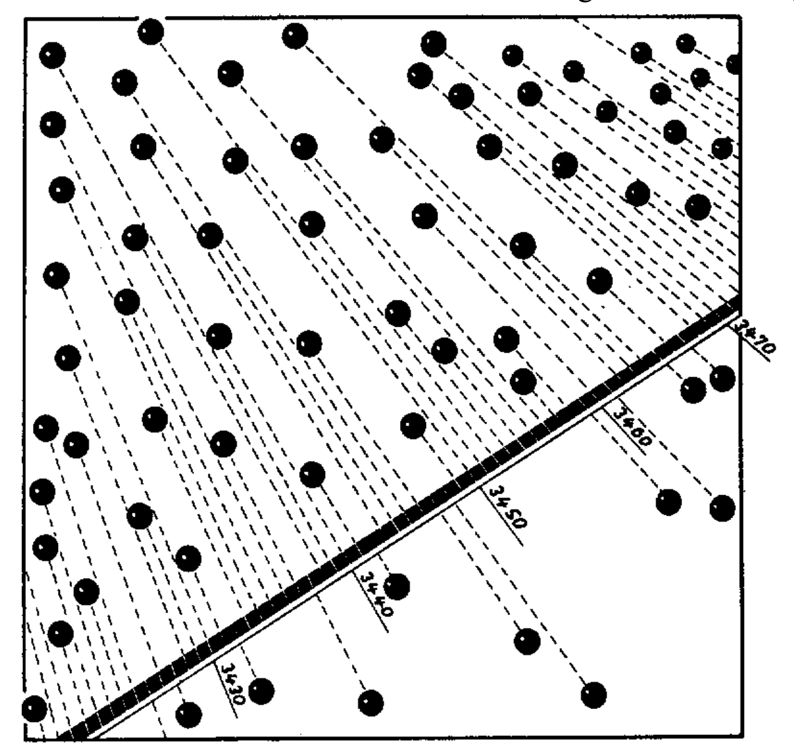
Nun noch ein wenig genauer: Für den Abend wären bei uns 10 Gäste angesagt; das wären mit uns beiden Gastgebern im ganzen 12 Personen. Auch jetzt muss unsere Hausfrau „zuordnen“. Jede Person bekommt einen Stuhl, einen Suppen- und einen Bratenteller, eine Gabel, ein Messer, ein Trinkglas und so fort. Und nun die — ganz selbstverständliche Mathematik der Angelegenheit: Die Anzahl der Stühle, Gabeln, Messer, Gläser und so fort ist, wie der Fachausdruck lautet, der Anzahl der zu Abend essenden Personen **eineindeutig**[1)] zugeordnet. Und alle diese „Mengen“ von Messern, Stühlen, Gläsern und so fort sind „**gleichzahlig**“, da für 12 Personen 12 Stühle, 12 Messer, 12 Gabeln, 12 Gläser und so fort notwendig sind.

Somit haben wir die Definition: Zwei Mengen heißen **gleichzahlig**, wenn zwischen ihren Elementen eine **eineindeutige** Zuordnung möglich ist; das Merkmal, das eine Menge mit allen gleichzahligen Mengen gemein hat und durch das sie sich von jeder mit ihr nicht gleichzahligen Menge unterscheidet, heißt die **Anzahl** dieser Menge. Alles Selbstverständlichkeiten, die wir uns aber gut merken wollen!

Jetzt aber kommt der „Königsgedanke“, der folgenschwere Schluss aus unserem Zuordnen: Nirgends ist gesagt, und niemand kann es behaupten, dass das Zuordnen nur im Endlichen gilt !

[1)] Eineindeutig oder umkehrbar eindeutig, das heißt z. B. den 12 Gläsern können umgekehrt auch 12 Personen eindeutig zugeordnet werden.

Und damit haben wir das Gedankenwerkzeug in den Händen, mit dem wir dem „unfasslichen Ungeheuer“ Unendlichkeit beikommen können! Die Brücke ist geschlagen! Aber bevor wir das neugefundene Werkzeug ansetzen, müssen wir noch zwei Feststellungen hinsichtlich der Benennung nachholen. Es hat eigentlich keinen Sinn, von einer unendlich großen „Zahl“ zu sprechen, denn im Wesen des Unendlichen liegt es, dass es größer ist als jede noch so große Zahl. Man spricht daher richtiger von „**unendlichen Mengen**“. Zweitens: Auch die Bezeichnung „groß“ oder „größer“ haben wir eigentlich schon verausgabt, wenn wir von Unendlichem sprechen, da wir es ja von vornherein als unendlich groß angenommen haben. So sagen wir statt Größe einfach „**Mächtigkeit**“, statt größer „**mächtiger**“ und statt kleiner „**weniger mächtig**“. Wohlgemerkt, nur bei unendlich großen Mengen!



Die Elemente einer abzählbaren Menge
können der Zahlengeraden zugeordnet werden

Nun wissen wir genug und können die Zauberkraft unseres soeben konstruierten Nussknackers versuchen. Die erste Frage, die sich erhebt, wäre wohl die: Gibt es überhaupt unendliche Mengen? Da brauchen **wir** wohl nicht lange zu suchen. Es gibt offenbar unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen[1]. Die Menge oder, um verständlicher zu sein, die Gesamtmenge aller natürlichen Zahlen enthält also unendlich viele „Elemente“, sie ist daher eine unendliche Menge. Diejenigen Mengen, die gleichzahlig dieser Menge aller natürlichen Zahlen sind, deren Elemente also eindeutig den natürlichen Zahlen zugeordnet werden können, heißen „**abzählbar unendliche Mengen**“. Damit soll gesagt sein: Eine Menge, deren Anzahl zehn ist, ist jene, deren Elemente den ersten zehn natürlichen Zahlen zugeordnet werden können — unsere Fingerzahl ist demnach eine solche Menge —und die also auch mit Hilfe der ersten zehn natürlichen Zahlen abgezählt werden kann. Das Hauptkennzeichen dieser Mengen ist und bleibt die Abzählbarkeit, die „Nummerierungsmöglichkeit“, wenn man will. Nun wird das Gesagte auf unendliche Mengen ausgedehnt. Eine abzählbar unendliche Menge ist demnach diejenige, deren Elemente eindeutig **sämtlichen** natürlichen Zahlen zugeordnet werden, deren Elemente also Stück für Stück mit sämtlichen natürlichen Zahlen „nummeriert“ werden können. Nach unserer Definition müssen aber sämtliche abzählbaren unendlichen Mengen dieselbe Mächtigkeit haben. Dieser Mächtigkeit hat man den Namen „**Aleph Null**“ ☺ gegeben, genauso wie die Anzahl, die den Fingern unserer linken Hand zugeordnet werden kann, von Urzeiten her den Namen „Fünf“ hat.

---

[1] Natürliche Zahlen sind die ganzen positiven Zahlen 1, 2, 3, 4 und so fort.

Und zwar wollen wir im folgenden für „**Aleph Null**“ *a* schreiben. Dieses *a* ist demnach das erste Beispiel für die Mächtigkeit einer unendlichen Menge (oder, wie es wissenschaftlich heißt, einer „transfiniten Kardinalzahl“), die wir kennen lernen.

Wir wiederholen. Wie die Aussage „Eine Menge hat die Anzahl fünf“ bedeutet, dass die Elemente dieser Menge eindeutig den Fingern der rechten (oder linken Hand) oder den Zeichen 1, 2, 3, 4, 5 zugeordnet werden können, so bedeutet die Aussage „Eine Menge hat die Mächtigkeit *a*“, die Elemente dieser Menge können eindeutig sämtlichen natürlichen Zahlen zugeordnet oder mit ihnen „nummeriert“ werden.

Sehen wir uns jetzt nach anderen Beispielen abzählbar unendlicher Mengen um, so kommen wir sogleich zu höchst überraschenden, unseren landläufigen Ansichten zuwiderlaufenden, Tatsachen. Wie nicht geleugnet werden kann, ist auch die Menge aller **geraden** Zahlen abzählbar unendlich. Daraus folgt aber nun unweigerlich, dass die geraden Zahlen **dieselbe** Mächtigkeit haben wie alle natürlichen Zahlen überhaupt, obwohl man eher geneigt wäre anzunehmen, dass es viel weniger gerade Zahlen als ganze Zahlen überhaupt gäbe. Es stellt sich aber zu unserer Verblüffung heraus, dass aller Zahlen auch nicht mehr sind als gerader Zahlen! Und ebenso sieht man, dass auch die Menge aller ungeraden Zahlen abzählbar unendlich ist. Es sind demnach genau so viele gerade wie ungerade, wie ganze Zahlen überhaupt vorhanden! Noch überraschender ist es, dass auch die Menge aller Paare natürlicher Zahlen abzählbar unendlich und daher gleich *a* sein muss. Nur unwesentlich verwickelter ist dann der Beweis, dass die Menge aller rationalen Zahlen mit allen gemeinen Brüchen abzählbar unendlich, also gleichzahlig mit allen natürlichen Zahlen ist. Bereits in den siebziger Jahren des neunzehnten Jahrhunderts gelang sogar der Beweis, dass auch die Menge aller sogenannten algebraischen Zahlen (das sind sämtliche möglichen Zahlen mit Ausnahme der transzendenten) abzählbar unendlich und damit wieder gleich *a* ist.

Zusammengestellt ergibt sich demnach folgender überraschend-wunderlicher Tatsachenbestand:

Die Mengen

aller natürlichen Zahlen überhaupt aller geraden Zahlen aller ungeraden Zahlen aller rationalen Zahlen aller sogenannten algebraischen Zahlen	haben die gleiche Mächtigkeit und dieselbe Kardinalzahl Aleph Null !

Angesichts dieser geradezu verstiegenen Ergebnisse wird der Leser vielleicht an unserem gesunden „Menschenverstand“ zweifeln. Er glaubt gewiss, wir seien bei dem Versuch, mit der düster-unheimlichen Unendlichkeit zu spielen, selber das Opfer einer völligen Begriffsverwirrung geworden. Aber gemach, so schlimm ist die Sache doch nicht!

Wir gingen ja von vornherein darauf aus, Unbekanntes, ja selbst **Unvorstellbares** zu suchen. Und da darf es uns nicht wundern, wenn wir **Unerwartetes**, bisher **Unerhörtes**, zu hören bekommen. Denn genau so, wie es sonnenklar ist, dass ein neuentdecktes, bisher unbekannt gewesenes Tier nur dann Anspruch darauf erheben darf, als neue, noch nicht bekannt

gewesene Art zu gelten, wenn es sich in wesentlichen Merkmalen von allen bisher bekannt gewesenen Tieren unterscheidet, so müssen sich auch die unendlichen Mengen ganz grundlegend von den endlichen unterscheiden! Denn es war zu erwarten, dass im unbegrenzten Bereich des Unendlichen ganz andere Gesetze herrschen müssen als in der Begrenztheit des Endlichen. Außerdem widersprechen die Absonderlichkeiten der ersten gefundenen unendlichen Menge *a* in keiner Weise den gleich anfangs festgestellten Eigenschaften unendlicher Größen. Aber auch die naheliegende Vermutung, alle unendlichen Mengen seien untereinander gleich, ist unbegründet. Warum? Das werden wir gleich sehen.

Im Jahre 1874 wurde nämlich der Beweis dafür gefunden, dass es Mengen gibt, die **nicht abzählbar** sind. Es müssen also noch viele (in Wirklichkeit: **unendlich viele**) unendliche Mengen vorhanden sein. Vor allem ließ sich zeigen, dass die Menge aller sogenannten reellen Zahlen (das sind alle möglichen Zahlen mit Ausnahme der komplexen, also der mit *i* verwobenen) nichtabzählbar unendlich ist. Der Beweis hierfür ist sehr einfach und einleuchtend. Es genügt offenbar, zu zeigen, dass die Menge aller reellen Zahlen zwischen Null und Eins nicht abzählbar unendlich ist, das heißt, sie ist so zahlreich, dass ich immer wieder eine weitere Zahl einschieben kann, wie dicht ich auch die Zahlen aneinander reihe. Wir gehen dabei von der Tatsache aus, dass die allerfeinste „Teilung“ auf der Zahlengeraden (die wir ja von unserer Thermometerskala her kennen) erst durch die unendlich langen nichtperiodischen[1)] Dezimalbrüche erreicht wird. Gelingt es mir zu beweisen, dass ich zu einer beliebigen Menge gegebener unendlicher nichtperiodischer Dezimalbrüche immer noch einen neuen dazukonstruieren kann, so folgt daraus, dass jede (auch die theoretische) Abzählerei aus dem Grund unmöglich ist, weil ich immer noch etwas nicht Mitgezähltes, das gewissermaßen „vergessen“ wurde, hinzufügen kann.

Oder anders ausgedrückt:

Habe ich alle ganzen Zahlen von 0 bis 100 abgezählt, so bin ich damit ein für allemal fertig. Ich kann keine mehr irgendwo dazwischenschieben, wenn ich bei ganzen Zahlen bleiben will. Auf 38 folgt eben 39, auf 82 folgt 83 und so fort. Anders ist das aber mit unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüchen. Ich mag noch so viele niederschreiben (die alle zwischen 0 und 1 gelegen sind) — immer wieder kann ich noch einen „neuen“ unendlichen Dezimalbruch dazuerfinden. Natürlich ist der Beweis nur im Endlichen ausführbar, da wir unendlich lange Dezimalbrüche nicht niederschreiben können. Angenommen, ich hätte die folgenden unendlichen nichtperiodischen Brüche vor mir:

$$0,\mathbf{1}\,7\,5\,5\,4\,\ldots$$
$$0,2\,\mathbf{0}\,3\,9\,3\,\ldots$$
$$0,3\,1\,\mathbf{3}\,5\,4\,\ldots$$
$$0,4\,8\,7\,\mathbf{5}\,6\,\ldots$$
$$0,5\,4\,5\,3\,\mathbf{8}\,\ldots$$

Im Augenblick kann ich nach einem förmlichen System eine Zahl angeben, die mit keinem dieser unendlichen Dezimalbrüche gleich ist. Das „Rezept“ dazu lautet: Man wähle die erste Dezimale der neuen Zahl verschieden von der ersten Dezimale des ersten Bruches; dann die zweite Dezimale der neuen Zahl verschieden von der zweiten Dezimale des zweiten Bruches;

[1)] Erinnere dich: Alle unendlich langen, **periodischen** Dezimalbrüche sind, wie wir schon wissen, gemeine Brüche, das heißt, sie können sofort in solche umgewandelt werden.

hierauf die dritte Dezimale der neuen Zahl verschieden von der dritten Dezimale des dritten Bruches, und so fort. Es ist nun klar, dass man auf diese Weise eine neue reelle Zahl zwischen 0 und 1 finden muss, die von den hier aufgeschriebenen verschieden ist.

Noch einmal: Wir haben mit den ausgewählten Ziffern — aus der Diagonalen des Zahlenschemas — zunächst eine unendliche Dezimalzahl 0,10 358 . . . gebildet. Alle Ziffern dieser Dezimalzahl ersetzen wir dann durch neue. Wie, ist völlig gleichgültig. Nehmen wir etwa die neue Dezimalzahl 0,21 468 . . ., wobei wir jede Ziffer der alten Zahl um 1 erhöht haben, so ist diese Dezimalzahl in unserem Schema bestimmt nicht vorhanden. Sie unterscheidet sich von der ersten Zahl unseres Schemas auf alle Fälle in der ersten Dezimale, ebenso von der zweiten Zahl mit Sicherheit in der zweiten Dezimale und so fort.

Damit ist nun bewiesen, dass die Menge der reellen Zahlen nicht gleichzahlig sein kann mit der Menge der natürlichen Zahlen! Diese neue „Art“ der Unendlichkeit nennt man die „**Mächtigkeit des Kontinuums**“. Sie wird mit ***c*** bezeichnet. Aus dieser Tatsache ergibt sich eine große Überraschung. Wie wir früher fanden, ist die Menge aller ganzen Zahlen, der gemeinen Brüche und aller unendlichen periodischen Dezimalbrüche (nicht verwechseln mit den unendlichen nichtperiodischen Brüchen) abzählbar unendlich. Jetzt aber stellt sich heraus, dass die Menge aller reellen Zahlen überhaupt nicht abzählbar ist. Es muss also noch eine Art besonderer Zahlen unter den reellen Zahlen geben, deren Mächtigkeit größer ist, und das sind eben die sogenannten **transzendenten Zahlen**, von denen wir somit jetzt wissen, dass es ihrer eine unendliche Menge gibt.

Versuchen wir nun, unsere Entdeckung durch ein greifbares Bild zu erklären. Die „Mächtigkeit“ einer abzählbaren unendlichen Menge mit der Kardinalzahl *a* gleicht einer Treppe, auf jeder der gleichhohen Stufen steht eine ganze Zahl. Irgendwo ist die Stufe 2144, auf sie folgt 2145, dann 2146 und so fort bis in alle Unendlichkeit. Unsere Treppe mit deutlich unterscheidbaren Stufen (wir können sie uns zum Beispiel ganz gut 1 cm hoch vorstellen) führt in unendliche Höhen, unendlich viel weiter als die fernsten Sterne. Warum, ist wohl verständlich: Die Treppe muss unendlich lang sein, weil sie unendlich viele, aber merkbar hohe Stufen besitzt. Eine andere Treppe dagegen stellt unsere nicht abzählbare Unendlichkeit dar. Hier ist die Stufenhöhe unendlich klein; denn von einer transzendenten Zahl zur anderen ist es ja beliebig nahe. Daraus folgt: Die ganze Treppe kann, obwohl sie eine unendliche Anzahl von Stufen enthält, **beliebig kurz** werden. Und dieser zweiten Art der Unendlichkeit, der „Mächtigkeit des Kontinuums“ oder, anders ausgedrückt, der „Mächtigkeit der lückenlosen Aneinanderreihung aller reellen Zahlen“, entsprechen zum Beispiel die Punkte auf einer Geraden.

Jetzt kommen ein paar Überraschungen, die unser ganzes mathematisches Denken wie Keulenschläge treffen und alle uns in Fleisch und Blut übergegangenen Vorstellungen förmlich auf den Kopf stellen. Es gibt zum Beispiel folgenden scheinbaren Widersinn: Jeder auch nur ein paar Millimeter lange Bleistiftstrich enthält so viele Punkte, als der unendlichen Menge des Kontinuums entspricht. Eine tatsächliche und vollkommene Unendlichkeit hat also in unserer Westentasche Platz!

Ja noch mehr: Diese Unendlichkeit des Kontinuums ist noch viel „größer“ als die des *a*, das die kleinste Art einer unendlichen Menge vorstellt. Und das Allertollste: Jedes Blatt Papier, ja selbst der ganze Weltraum enthält nicht mehr Punkte, als sich auf einem Bleistiftstrich von ein paar Millimeter Länge unterbringen lassen. Wie groß, richtiger gesagt, um wie viel größer, „mächtiger“ die Unendlichkeit des Kontinuums ist als die des *a*, wissen wir nicht. Um diese

Frage formt sich das berühmte Kontinuum-Problem, mit dem sich die besten Mathematiker abmühen.

Eine tolle Sache, die noch toller wird, wenn wir erfahren, dass es unendlich viele transfinite Kardinalzahlen gibt, von denen man aber nur drei kennt: a, c und f. Die Kardinalzahl f — die wir noch nicht behandelt haben — gibt die Mächtigkeit der Menge sämtlicher möglichen Funktionen an; kurz gesagt also die Anzahl aller Möglichkeiten, nach denen beliebig viele Größen voneinander abhängig sein können. Um das Gesagte dem Leser verständlicher zu machen, sei an früher Gesagtes erinnert: Wir sind auf „Anzahlen" anderer Art gestoßen, als wir sie aus dem Endlichen her kennen, sind in ein völlig anderes Reich der Mathematik geraten, das keine Verbindung mehr mit dem Endlichen hat. Man kann Unendlichkeiten beliebiger Mächtigkeit annehmen, gleichsam noch immer höhere Potenzen der Unendlichkeit ersinnen. Was uns aber nicht möglich ist, wenigstens nicht mit unseren im Endlichen und fürs Endliche ersonnenen Zahlen, ist ein auch nur annäherndes Grenzenziehen. Alle unendlich großen Anzahlen sind gleichsam so riesig, dass schon ihre Grenzen verschwimmen und dabei alle endlichen Zahlen und Zahlenbegriffe überfluten, wie der Ozean sich nicht durch eine Furche abgrenzen lässt, die wir mit der Spitze des Spazierstocks in dem Sand des Strandes ziehen. Wir kennen die kleinste unendlich große Menge, das a. Man sollte nun erwarten, dass sich demnach auch die größte endliche Zahl angeben ließe. Das ist indes nicht möglich; nicht etwa deswegen, weil wir zu einem Begriff von der Größe a kämen, sondern aus der bereits erwähnten Definition des Unendlichen; denn unendlich ist, was noch größer ist als jede noch so groß gedachte Zahl! Wie soll man es da also machen, um nicht mit dem, von dem wir ausgegangen sind, in Widerspruch zugeraten ?[1)]

Was man sonst noch von den unendlichen Mengen ermittelt hat, ist schwer zu sagen; die ganze Mengenlehre ist gegenwärtig dazu noch zu sehr in der Entwicklung begriffen (Anmerkung des „Wiederauflage-Redakteurs": 1958!). Nur einzelne einfache Rechenregeln mit unendlichen Mengen können schon als gesichert gelten. Weiter vorzudringen in jene merkwürdigen Grenzgebiete menschlichen Wissens verbietet der unserem Spaziergang gesteckte Rahmen. Natürlich brennt jetzt dem Leser, der uns getreulich auf diesen verschlungenen Pfaden gefolgt ist, die Frage auf den Lippen: Gibt es überhaupt etwas Unendliches?

Diese Frage ist durchaus berechtigt, kann aber vom Boden unserer hier geführten Untersuchungen aus nicht beantwortet werden. Wir stellen lediglich fest, dass es — soweit wir zu urteilen vermögen — überhaupt nur zwei Möglichkeiten für Unendliches gibt:

Nämlich die Unendlichkeit des Raumes und die Unendlichkeit der Zeit !

Aber bei diesen Problemen spielen noch ganz andere Erwägungen die ausschlaggebende Rolle, und wir kommen auf sie zurück. Vorläufig können wir nur mit Befriedigung feststellen, dass wir dem zunächst scheinbar so unangreifbaren Ungeheuer „Unendlichkeit" dank unserer „Hottentottenzuordnerei" ein erfolgreiches Gefecht geliefert und wenigstens einiges herausbekommen haben. Dass wir nicht ganz klug geworden sind, war natürlich von vornherein zu erwarten. „Wir können uns nämlich", so spottet ein namhafter deutscher Astrophysiker, der jahrelang über dem Problem des Unendlichen gesessen hat, „von der Unendlichkeit so wenig eine Vorstellung machen wie ein Blinder, wenn er einen feuchten Fetzen

[1)] Die hier naheliegende Gleichung „$a - 1$ = größte unendliche Zahl" ist unsinnig, weil sie der Definition einer unendlichen Zahl widerspricht. Ich kann von Unendlich abziehen, soviel ich will, es wird nicht kleiner.

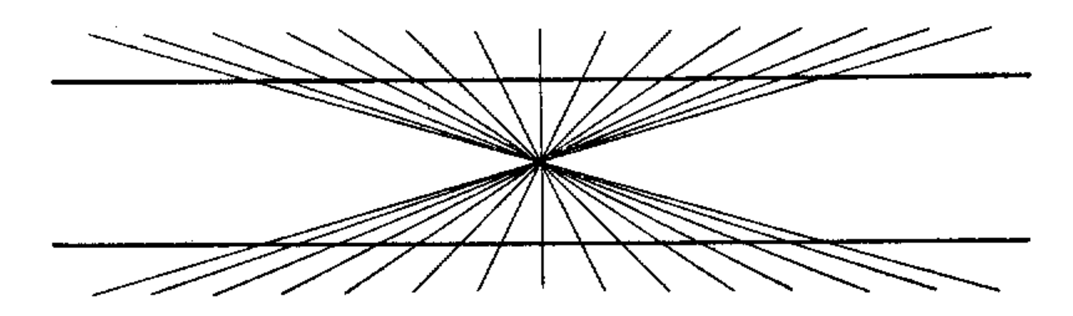
greift, von der Unendlichkeit und unermesslichen Weite und Großartigkeit des Ozeans“. Immerhin sind wir bei unserem Vorstoß noch glimpflich weggekommen. Im folgenden aber nähern wir uns auf seltsam verschlungenen Wegen, die uns inmitten der sich auftürmenden Hindernisse ein merkwürdig-alltägliches Wunder zeigen, neuen mathematisch-geometrischen Ungeheuern. Wieder fängt es scheinbar ganz unverdächtig und harmlos an ...



Von der echten und der unechten Kugel

Selbst der Tieferschauende macht sich für gewöhnlich nicht viel Gedanken darüber, wie überraschend verwickelt oft Ursachen und Zusammenhänge einfacher Erscheinungen sind und wie eng bedeutungsvolle Erkenntnisse mit alltäglichen und selbstverständlichen Fragen verquickt sind.

Da liegt vor uns auf dem Tische ein weißes Papier. Wir nehmen ein Lineal und ziehen entlang dessen Kanten mit einem Bleistift zwei Striche. Wir bekommen zwei gerade Linien, die zueinander eine ganz bestimmte Lage haben. Ihr Abstand ist nämlich überall gleich, das heißt sie sind parallel. Zum Zeitvertreib ziehen wir über unsere beiden Parallelen ein Büschel von Geraden, die alle von einem Punkt ausgehen. Das Ergebnis ist verblüffend: Niemand wird



Krumm oder gerade, das ist hier die Frage!

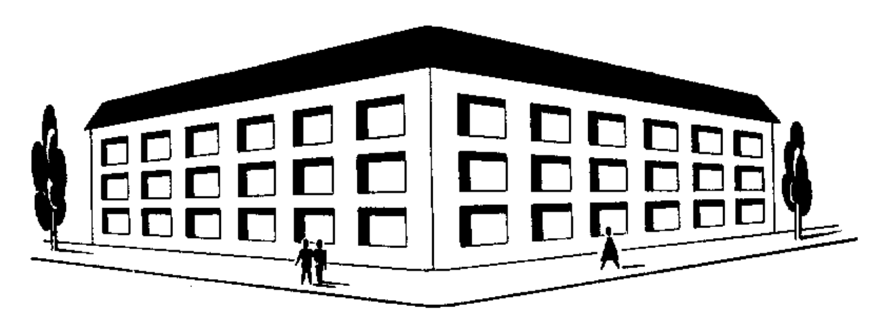
jetzt glauben dass die beiden zuerst gezogenen Geraden tatsächlich überall den gleichen Abstand aufweisen. Sie scheinen vielmehr eigenartig durchgebogen. Wir haben aber nur eine optische Täuschung konstruiert. Reizvoller wird jedoch unser einfaches Experiment, wenn wir fragen, woran wir eigentlich die Parallelität zweier Geraden erkennen können.

Die Antwort lautet: Nur durch **Messungen**, durch das wiederholte Anlegen eines Maßstabes stellen wir fest, ob zwei Geraden wirklich parallel sind, das heißt voneinander überall den gleichen Abstand haben.

Das erscheint zunächst verwunderlich. In Wirklichkeit ist aber das hier berührte Problem noch viel verwickelter. Unsere Augen sind nämlich derart „formenblind“, dass wir streng genommen überhaupt nicht wahrnehmen können, ob eine Linie oder ein Gegenstand gerade oder gekrümmt ist. Eine verblüffende Feststellung. Um sie zu beweisen, müssen wir uns ins Freie begeben. Schon ein kurzer Spaziergang, den wir mit „sehenden Augen“ unternehmen, wird uns mit ganz merkwürdigen Tatsachen bekannt machen. Auf unserer Wanderung stoßen wir z. B. auf eine langgestreckte, schmucklose Kaserne. Wir stellen uns nun in einem Abstand

von etwa 10 bis 15 m vor dem Gebäude auf und richten unseren Blick auf Dachfirst, Fenstersimse und Dachrinnen.

Alle drei verlaufen in ziemlich genauen waagerechten Geraden. Da die Kaserne auf ebenem Boden steht, liegen auch alle drei Linien überall in gleicher Höhe über dem Pflaster. Und dass sie mit Bestimmtheit gerade sind, braucht nicht erst bewiesen zu werden, denn man baut weder krumme Wände noch gewellte Dachfirste. Ganz anderes aber vermelden die Augen.



Wie wir Parallelen sehen!

Unmittelbar vor uns scheint das Gebäude am höchsten zu sein, einfach deswegen, weil es für uns da am nächsten ist. Nach rechts und links wird die Entfernung jedoch immer größer. Dabei erscheinen uns auch Mauern, Fenster, Dach usw. niedriger und kleiner, bis sie wie zwei Bahngleise in der Ferne schließlich zu einem Punkt zusammenzulaufen scheinen. Aber gerade die in der Mitte vor uns am größten erscheinende Höhe des Dachfirstes sowie die scheinbar immer geringer werdende Größe des Gebäudes beweisen folgendes:

Nach links und rechts stürzen alle Linien perspektivisch ab; es geht gewissermaßen nach beiden Seiten bergab. In der Mitte aber, gerade vor uns, ist der „Gipfelpunkt“. Nach rechts und links abfallen und in der Mitte am höchsten sein, das kann in Wirklichkeit keine einzige Gerade. Nur bei einer geknickten oder durchbogenen Linie ist das möglich. Und tatsächlich: Wir sehen die Geraden an der Kaserne allesamt **durchgebogen** (und zwar in Hyperbelform). Jedes Bahngeleise, neben dem wir stehen, offenbart uns das gleiche. Vor uns sind die Schienen scheinbar am weitesten voneinander entfernt, nach rechts und links aber laufen sie zusammen.

Und so gilt der Schluss:

Wir können unter Umständen überhaupt nicht erkennen, ob eine Linie gerade oder krumm ist, einfach deswegen nicht, weil wir in sehr vielen Fällen in Wirklichkeit gerade Linien krumm sehen und umgekehrt.

Noch schlimmer ist es mit den Parallelen, denn diese sehen wir so gut wie nie parallel, sondern infolge der perspektivischen Wirkung irgendwie zusammenlaufend.

Alle die Fragen, die sich aus diesen einfachen Tatsachen ergeben, haben die Menschheit jahrtausendelang beschäftigt, ehe man zu einer richtigen Erkenntnis kam. Und zwar waren es die Maler und Zeichner, die durch die verzwickte Frage „Soll man die Dinge so darstellen, wie sie wirklich sind, oder wie wir sie sehen?“ in arge Verlegenheit geraten sind. **Systeme und Normen**, die uns heute seltsam abenteuerlich anmuten, mussten als Ausweg herhalten. So behalfen sich die ägyptischen Bildhauer und Maler bei der Darstellung der menschlichen Figur, indem sie den Kopf im Profil zeichneten, die Augen aber, wie wir sie „en face“ sehen, nämlich mandelförmig. Der Oberkörper wird, um einen rechten Winkel verdreht, von vorn

gesehen dargestellt, der Unterkörper dagegen samt den Beinen wieder von der Seite. Die ganze Figur sieht eigenartig verdreht aus, und es entsteht ein Gesicht, das weder der Wirklichkeit entspricht noch so ist, wie wir es sehen. Noch immer aber haperte es bei der Kunst, Parallelen abzubilden, mit der Perspektive. So Großartiges man im Altertum und Mittelalter auch schon in der Darstellung der menschlichen Figur geleistet hat — sobald Baulichkeiten, Parallelen im Bild wiedergegeben werden mussten, war das Chaos da. Erst den großen Künstlern der Renaissance danken wir die Erfindung der richtigen perspektivischen Zeichnung; kein Geringerer als **Albrecht Dürer** hat von seiner Italienreise die Kunst, perspektivisch zu zeichnen, also auch Parallelen richtig wiederzugeben, zu uns mitgebracht.

Es könnte nun leicht erscheinen, dass unsere so fein durchdachte und tausendmal bewährte Art, die Welt zu zeichnen oder zu malen, unangreifbar richtig wäre. Doch weit gefehlt! Man hat nämlich mancherlei vergessen, was streng wissenschaftliches Denken einfach als unerläßlich hinstellt. Wir greifen hier nur den am häufigsten vorkommenden Fehler heraus, der mit unserem Fragenkreis unmittelbar zusammenhängt. Eigentlich war es erst das unbestechliche, nach mathematischen Gesetzen abbildende Linsenauge der Photokamera, das viele an Unsinn grenzende Fehlerhaftigkeiten unserer bildlichen Darstellungsform aufdeckte, und zwar handelt es sich auch hier wieder um unsere Parallelen. Sind waagerecht liegende Parallelen darzustellen, also etwa Gebäudekanten, Straßen- oder Schienenanlagen, so zeichnet jeder Künstler das gesetzmäßige Zusammenlaufen dieser Linienzüge, denn sonst entstünden für den Beschauer störende Fehler.

Natürlich gilt dieses Zusammenlaufen auch für alle schiefliegenden und senkrecht emporragenden Parallelen. Man braucht sich nur in den engen Lichthof eines hohen Hauses oder dicht vor zwei Kirchtürme zu stellen: sofort sieht man, dass die Hausmauern nach oben zusammen gehen, oder wie die Kirchtürme das Gesetz der scheinbaren Annäherung mit steigender Entfernung befolgen und nun schief zueinander geneigt nach oben zusammenlaufen. So aber zu malen und zu zeichnen, ist einfach — **verboten** Und wir empfinden auch tatsächlich jede derartige Darstellung als unnatürlich, obwohl sie richtig ist. So kommt es, dass man den Liebhaberphotographen, der den Apparat bei der Aufnahme nicht genau waagerecht hält, sondern die Kamera, um etwa zwei schöne Kirchtürme ganz auf den Film zu bekommen, etwas emporsehen lässt, als Patzer und Pfuscher auslacht; denn das unbestechliche Auge der Kamera zeichnet immer und unbedingt perspektivisch richtig (wenn auch mitunter übertrieben) und gibt bei geneigt gehaltener Kamera geknipste Kirchtürme, Fabrikschlote und so fort eben getreulich schief und zusammenlaufend wieder, was aber nicht sein darf.

Warum?

Nun, einfach deswegen nicht, weil es nach einem angenommenen, willkürlich aufgestellten Kunst- und Darstellungsgesetz einfach verboten ist. Und alle Versuche, derartige „stürzende Linien“, also vorn übergeneigte Fabrikschlote, nach hinten umfallende Kirchtürme, denn doch gelten zu lassen — die „Neue Sachlichkeit“ versuchte dergleichen —, scheiterten. So tief sitzt uns jahrhundertealte Überlieferung im Fleisch!

Damit haben wir aber erst die gewissermaßen kleinste und unschuldigste Hexerei der Parallelen angenagelt. Ungleich schwerer wiegend jedoch ist das, was die Parallelen in der exakten Wissenschaft angerichtet haben. Es fällt schwer, ein zweites Beispiel dafür zu finden, wie ein Geisteskampf um eine an sich unscheinbar aussehende Frage durch Jahrtausende hindurch die besten Köpfe erhitzte.

Damit ist es nun eine recht merkwürdige Sache, die schon im grauen Altertum begann.

Um 300 v. Chr. lebte in Alexandrien am Hofe des Königs Ptolemäus Lagi der „Vater aller Geometrie“, der griechische Gelehrte **Euklid**. So ziemlich alles, was selbst der moderne Alltagsmensch von der Geometrie weiß und lehrt, geht auf diesen genialen Kopf zurück, der die Grundlagen unseres Wissens, nach denen wir heute z. B. noch unsere Lokomotiven und Flugzeuge bauen, in seinem berühmten Buch „Stoicheia“ niedergelegt hat. Alle Grundlagen, auf denen wir heute noch bauen, sind darin zum erstenmal festgehalten, wie zum Beispiel der Satz: „Der Punkt ist ein Gebilde, dessen Teil ein Nichts ist.“ Natürlich musste Euklid von gewissen unbeweisbaren, aber praktisch erhärteten Voraussetzungen, den sogenannten Axiomen, ausgehen. Die meisten davon stehen auch heute noch unerschütterlich fest. Nur eines beschäftigte seit Jahrhunderten immer wieder die Aufmerksamkeit der Fachgelehrten, nämlich das berühmte **Parallelenaxiom**. Euklid stellte als Wahrheit die Aussage auf, dass sich zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt außerhalb dieser nur **eine einzige** Parallele ziehen lässt. Immer wieder haben die Gelehrten versucht, diesen Satz zu beweisen, der, wie man sehr bald erkannte, eine außerordentlich verzwickte Wahrheit enthält. Doch alle Mühe war vergebens! Jeder Beweis führte zu Widersprüchen und Unstimmigkeiten, und erst nach etwa 2000 Jahren dämmerte die Erkenntnis, dass der Satz überhaupt unbeweisbar sei, was soviel bedeutete, dass es außer unserer üblichen Geometrie der Ebene noch andere Geometrien geben müsse. Der erste, der die ungeheure Bedeutung dieses Geheimnisses erkannte, war **Carl Friedrich Gauß** in Göttingen. Es ist aber bezeichnend für die Tragweite der Unbeweisbarkeit dieses Problems, dass selbst dieser „Weltmeister“ der Mathematik es nicht wagte, mit seiner revolutionären Ansicht herauszurücken, weil er, wie er selbst sagte, „das Geschrei der Böotier“ fürchtete. Unabhängig von ihm wurde dann die Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms von dem Russen **Lobatschewskyj** und dem Ungarn **Bolyai** gefunden, deren Arbeiten aber nicht gleich anerkannt wurden. Natürlich leuchtet es dem Laien nicht recht ein, weshalb hinter dieser Parallelengeschichte gar so abgrundtief Wichtiges stecken solle. Doch sehen wir uns die ganze Angelegenheit einmal genauer an!

Gesetzt den Fall, wir hätten nichts Besseres zu tun und säßen wieder an unserem Arbeitstisch vor einem kleinen Reißbrett, auf dem ein Papier aufgespannt ist. Wir nehmen nun auf diesem zwei beliebige Punkte an. Wie ohne weiteres klar ist, können wir diese zwei Punkte durch unendlich viele irgendwie gezogene Linien verbinden: durch alle möglichen Schlangenlinien, durch das Stück eines Kreisbogens, einer Ellipse, einer Hyperbel und so fort. Unsere unendliche Freiheit im Ziehen der Linien wird noch beträchtlich erweitert, wenn wir die bestehende Möglichkeit verwirklichen und auch durch den Raum Linien ziehen, etwa in der Weise, dass wir einen gekrümmten Draht, der über die Ebene des Papiers emporsteigt, von Punkt zu Punkt biegen. Klar ist bei dieser zunächst sinnlos anmutenden Spielerei eines: dass die kürzeste Verbindung zwischen beiden Punkten die **Gerade** ist, also jener „Strich“, den wir auf einfachste Weise durch Anlegen eines Lineals an die beiden Punkte erhalten. Wie nicht erst bewiesen zu werden braucht, beruht eigentlich unsere ganze Geometrie auf dieser merkwürdigen Eigenschaft der Geraden. Ohne Dreieck, ohne Reißschiene ist selbst mit dem besten Reißzeug, mit dem besten Zirkel eine praktische Geometrie unmöglich. Die wichtigste geometrische Figur, die wir kennen, das Dreieck, wird von Geraden gebildet, ja, genau besehen können wir auch nicht an Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel heran, wenn wir nicht irgendwie die Gerade zu Hilfe nehmen.

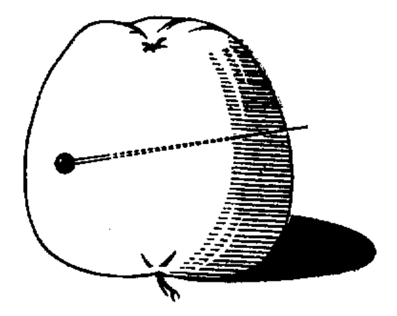
Hier müssen wir allerdings ein peinliches Geständnis ablegen. Es betrifft eben den einfachen Begriff der Geraden. Jeder Schüler erkennt auf den ersten Blick, was eine gerade und eine krumme oder gekrümmte Linie ist. Streng wissenschaftlich gibt es aber **überhaupt keine** befriedigende Definition der Geraden. Zumeist behauptet man, die Gerade sei die „kürzeste

Verbindung zwischen zwei Punkten“. Aber wie wir gleich sehen werden, stolpern wir schon in den nächsten Abschnitten ausgerechnet über diese Eigenschaft der Geraden. Die ganze Angelegenheit wird also weit verzwickter, als ursprünglich anzunehmen war.

Doch zurück zu unseren Untersuchungen!

Denken wir einmal ein wenig nach, ob denn die kürzeste Verbindung zweier Punkte durch eine Gerade die einzig mögliche und daher absolut richtige Lösung des Problems ist. Die Antwort auf diese zunächst müßig scheinende Frage zeigt ein überraschendes und die meisten gewiss verblüffendes Ergebnis. Es ist zunächst klar, dass, solange wir auf unserem Reißbrett bleiben, also nur die Ebene, eine Fläche, die nicht die geringste Krümmung aufweist, im Auge behalten, unwiderruflich die Gerade die kürzeste Verbindung ist; sie behält also ihre Königsrolle bei. Wie sieht aber die Sache dort aus, wo wir keine „Gerade“ im landläufigen Sinne ziehen können, wenn wir von der Ebene **abweichen** und uns auf einer gekrümmten Fläche bewegen? Wieder ein scheinbar absurder Gedankengang — in Wirklichkeit aber einer, der mit den tatsächlich vorhandenen Verhältnissen zwangloser und leichter in Einklang zu bringen ist als unsere Vorstellung von der Ebene. Denn in der Natur finden wir überraschenderweise so gut wie nirgends. eine Ebene. Sie ist eine gedankliche Voraussetzung, eine weitgehende Vereinfachung, deren Verkörperung sich in der Umwelt so gut wie niemals findet; denn selbst die Oberfläche unserer Seen und Meere wird, wenn wir sie uns von jedem Wellenschlag befreit denken, doch niemals eine Ebene sein, sondern, da wir auf einem angenähert kugelförmigen Weltkörper leben, ein Teil einer Kugelfläche. Die Kugeloberfläche liegt uns also gewissermaßen von Natur aus gegeben näher als die nur in Gedanken existierende Ebene, die wir praktisch lediglich in beschränkten Abmessungen annähernd verwirklichen können. Und dadurch bekommt unsere Frage nach der Geraden plötzlich ein ganz anderes Gesicht.

Die Suche nach der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten auf der für uns so wichtigen Kugeloberfläche führt zu einem merkwürdigen Ergebnis. Auf jedem Globus sehen wir sofort, dass die kürzeste Verbindung zwischen Wien und Madrid unter keinen Umständen eine Gerade sein kann, wenn wir auf der Oberfläche bleiben, denn die Gerade bohrt sich sofort tief in die Kugel ein, und wenn wir etwa eine kürzeste Eisenbahnverbindung zwischen diesen beiden Orten nach der Geraden ausführen wollten, müsste der Schienenstrang tief in die Erde getrieben werden; nur ein Tunnel könnte beide Städte auf geradem Wege verbinden[1]. Dazu ein Bild: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Flecken auf der Schale eines Apfels etwa wird durch eine Nadel angedeutet, die man so in den Apfel einstechen muss, dass beide Flecken von ihr getroffen werden. Ist man aber gezwungen, auf der Oberfläche zu bleiben, so wird die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Flecken durch ein **Fadenstück** hergestellt, das man mit Hilfe der durchgesteckten Nadel von Fleck zu Fleck zieht. Ebenso müsste man es auf dem Globus machen. Auch da wird die kürzestmögliche Verbindung zwischen den beiden Städten auf die Weise verwirklicht, dass man in Wien und Madrid je eine Nadel einsticht und zwischen beide einen



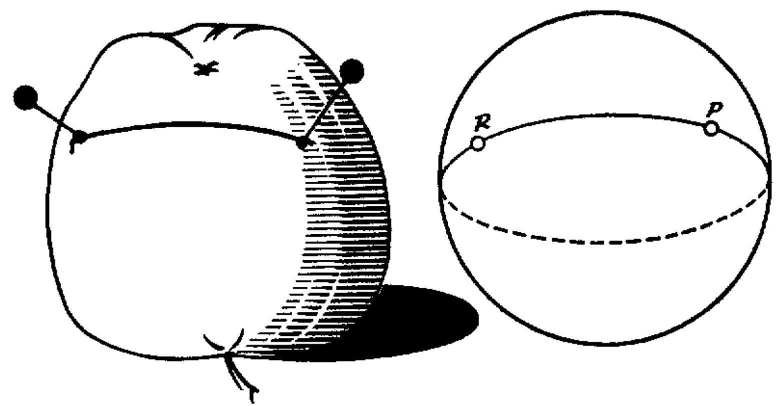
Was uns ein Apfel verraten kann!

[1] Ein derartiger Tunnel müßte überdies recht sonderbar angelegt sein. Er würde — obwohl seine schnurgerade Führung vorausgesetzt ist — in starkem Gefälle in Wien in die Erde zielen. Dann müsste sich die Neigung allmählich vermindern, um schließlich genau in der Mitte des Tunnels in die Waagerechte überzugehen. Von da an nähme dann die Steigung wieder zu, bis sie ihren Höchstwert an der Ausgangsstelle in Madrid erreichen müßte. Der Tunnel verliefe also vollständig schnurgerade und läge trotzdem in der Waagerechten, in der Steigung und im Gefälle. Warum wohl, lieber Leser?

Faden spannt. Untersuchen wir Form und Lage des Fadens, so stellt sich heraus, dass diese kürzeste Verbindung das **Stück eines Kreises** ist, richtiger gesagt, eines Großkreises, das heißt eines Kreises mit dem größtmöglichen Durchmesser, der auf der Kugel gezogen werden kann, oder mit anderen Worten:

Der Großkreisdurchmesser ist gleich dem Kugeldurchmesser.

So kommen wir also zu der merkwürdigen Erkenntnis, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, die sogenannte „geodätische Linie", auf der Kugel und damit auch auf der Erdoberfläche ein **Kreisbogenstück** ist.



Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugel

Mit dieser „Entthronung" der Geraden ist aber gleichzeitig eine ganz merkwürdige Hexerei vor sich gegangen. Nehmen wir ein praktisches Beispiel an. In einer Kesselfabrik wären zwei Zeichner. Der eine säße an seinem Reißbrett, der andere an einem mächtigen kugelförmigen Kessel, der gerade fertiggestellt worden ist. Zum Zeitvertreib wollen sie einmal praktisch erproben, um wie viel der Umfang eines Kreises größer ist als sein Durchmesser.

Der Mann am Reißbrett hat es natürlich sehr leicht: er nimmt einfach seinen Zirkel, zieht einen Kreis von sagen wir 3 dm Durchmesser und misst nun mit irgendeinem Rand den Umfang der erhaltenen Linie ab. Was herauskommt, ist klar: Er wird 9,42 dm als Umfang erhalten. Jeder Schüler weiß auch warum: Der Umfang des Kreises ist nämlich gleich dem Durchmesser multipliziert mit der uns wohlbekannten Ludolfschen Zahl π. — Sehr viel schwieriger hat es in unserem Falle der Zeichner am Kugelkessel. Vor allem kann er den normalen Zirkel nicht verwenden. Als findiger Kopf aber hilft er sich so, dass er an einer irgendwo vorstehenden Schraube einen Faden anbindet, an dem anderen Ende ein Stück Kreide befestigt und dafür sorgt, dass die Fadenlänge zwischen der als Mittelpunkt dienenden Schraube und der Kreide genau $1\frac{1}{2}$ dm lang ist. Jetzt zieht er den Kreis und misst den Umfang. Aber o Schreck!

Es stellt sich nämlich heraus, dass der Kreisumfang wesentlich **kleiner** ausgefallen ist, als nach der ehernen Regel zu erwarten gewesen wäre. Unser Zeichner bekommt nur einen Umfang heraus, der beispielsweise 2,9 mal größer ist als sein Durchmesser. Natürlich ärgert diese Unstimmigkeit die beiden Zeichner, und sie versuchen die Sache noch einmal mit größeren Kreisdurchmessern. Wieder bekommt der Mann an dem Reißbrett mit großer Genauigkeit die Ludolfsche Zahl heraus, aber sein Genosse an der Kugel hat abermals Pech! Sogar viel ärgeres als das erstemal, denn der jetzt mit bedeutend größerem Durchmesser

gezogene Kreis hat im Verhältnis einen noch viel kleineren Umfang, der etwa nur dem 2,2 fachen des Durchmessers entspricht.

Und wenn unsere Zeichner weiterexperimentieren, werden sie zu ihrer Verblüffung feststellen müssen, dass auf der Kugel der Umfang von Kreisen zunächst mit wachsendem Durchmesser zunimmt, jedoch bald der merkwürdige Fall eintritt, dass der Umfang noch **größer** werdender Kreise wieder **abzunehmen** beginnt, das heißt, dass eine Vergrößerung des Durchmessers eine **Verkleinerung** des Kreisumfanges zur Folge hat. Ja, es gibt z. B. sogar einen Kreis, dessen Fläche zahlenmäßig gleich ist dem Umfang[1)], schließlich aber wird sogar tollerweise ein Kreis möglich, dessen Umfang bei größtmöglichem Durchmesser — Null wird! Man versuche sich's nur vorzustellen! Und wie gedankenrichtige Untersuchungen sofort zeigen, ist das alles auch ganz richtig! Mir anderen Worten: Unsere auf der Ebene als selbstverständlich und unumstößlich geltenden Gesetze sind auf der Kugel glatt umgestoßen, wodurch sofort der eindeutige Beweis erbracht ist, dass unsere Geometrie auf der vom Menschenhirn konstruierten, praktisch aber so gut wie nie vorkommenden Ebene, nur einen **Sonderfall** vorstellt, es also auch Geometrien gibt, in denen ganz andere Verhältnisse und Beziehungen gelten.

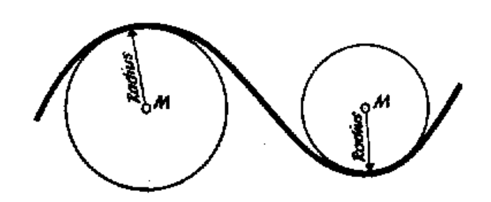
Kehren wir noch einen Augenblick zur Kugel zurück und vergleichen wir sie mit unserer Ebene. Die Winkelsumme eines ebenen Dreiecks beträgt bekanntlich immer 180 Grad. Auf der Kugel aber ist die Winkelsumme eines jeden Dreiecks stets **größer** als 180 Grad! Und jetzt wollen wir dem Leser auch das Grundproblem nicht vorenthalten, das die besten mathematischen Köpfe jahrtausendelang geplagt hat und das auch hier die überraschende Hexerei auf der Kugel bewirkt. Es ist nämlich das Geheimnis unserer Parallelen, das berühmte „Parallelenaxiom". Genauer behandelt, sieht die Sache so aus: Wir ziehen auf unserem Reißbrett einen geraden Strich und nehmen außerhalb desselben einen Punkt an, Es ist nun ohne weiteres klar, dass wir durch diesen Punkt zu der zuerst gezogenen Geraden nur **eine einzige** Parallele ziehen können. Jede andere Gerade, die wir durch den Punkt ziehen, muss logischerweise zu der ersten geneigt sein, das heißt, diese in irgendeiner Entfernung rechts oder links schneiden. Nun gehen wir auf die Kugel. Wir halten auch hier wieder eine „Gerade" fest, die teilweise oder ganz einem Großkreis entspricht. Nun nehmen wir außerhalb dieses Großkreises einen Punkt an und versuchen, durch diesen eine parallele Gerade, also den parallelen Großkreis, zu ziehen. Wie sich sofort zeigt, ist das **unmöglich**, denn der Großkreis durch den außerhalb des ersten Kreises angenommenen Punkt schneidet unseren Großkreis gleich in zwei Punkten. Dadurch wird der Satz bewiesen: Auf der Kugel lässt sich zu einer geodätischen Geraden durch einen außerhalb dieser gelegenen Punkt **keine** Parallele ziehen!

Es fragt sich jetzt nur, wodurch eigentlich unsere schöne Schulgeometrie der Ebene so grausam in Frage gestellt wurde. Die Antwort darauf kann nicht schwer fallen. Wir sind von einer Ebene, also von einer Fläche, die überhaupt keine Krümmung aufweist, zu einer gekrümmten Fläche übergegangen. Was bedeutet nun eine „Krümmung" in unserem Sinne? Gehen wir von einer beliebigen krummen Linie auf dem Papier aus. Nehmen wir auf ihr einen bestimmten Punkt *P* an, so können wir in diesem uns die Krümmung durch ein kurzes Kreisbogenstück ersetzt denken, das sich der Kurve möglichst innig anschmiegt. Zeichnen wir

---

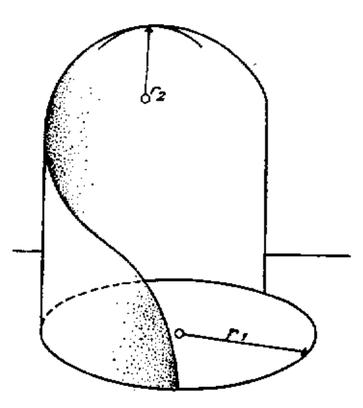
[1)] Natürlich sind diese beiden Zahlen den sogenannten „Dimensionen" nach verschieden; denn der Kreisinhalt ist eine Fläche, die z. B. nach cm^2 gemessen wird, der Umfang dagegen eine Linie, deren Maß dann nach cm angegeben werden muss. Bei allen praktischen Berechnungen ist es immer höchst wichtig, diese „Dimensionen" (zum Beispiel cm, cm^2 cm^3, aber auch kg/cm^2, km/h und so fort) auseinanderzuhalten. Wenn man „Kraut mit Rüben" multipliziert, kommt eben ein Unsinn heraus !

für ein paar solcher Punkte die entsprechenden Schmiegungs- oder Krümmungskreise, so stellt sich zunächst deutlich heraus, dass die Durchmesser dieser Kreise verschieden groß ausfallen und einmal auf dieser, dann auf jener Seite der Kurve liegen werden, je nach der Richtung seiner Krümmung. Wir sehen zunächst von der Lage der Mittelpunkte ab und versuchen, ein Maß für die Krümmung zu finden. Es ergibt sich aus den Radien der Kreise, aus den sogenannten Krümmungsradien.



Krümmungsradien
einer ebenen Kurve

Als gewiegte Formel-Ableiter, die wir ja schon sind, können wir auch sogleich die dazugehörige mathematische Beziehung finden. Zuerst in Worten: Die Krümmung, die wir kurz K nennen wollen, ist um so stärker, je kleiner der Radius des betreffenden Kreises ist. Wir brauchen also nur das „je stärker, desto kleiner“ ins Mathematische zu übertragen. Würden wir schreiben: K (die Krümmung) ist gleich r (das ist der Krümmungsradius des Kreises), so würde das heißen: Die Krümmung ist um so stärker, je größer der Krümmungsradius wird; was gänzlich verfehlt wäre. Schreiben wir dagegen: $K = \frac{1}{r}$ so haben wir das Richtige getroffen, denn je größer jetzt r wird, desto kleiner wird der absolute Wert des Bruches. Nun wollen wir rasch noch etwas anderes feststellen. Wenn wir eine krumme Linie aufzeichnen, so ist es klar, dass auch die Ebenen der Krümmungskreise am Papier liegen werden und dass diese Kurve an jedem Punkt nur **einen** Krümmungsradius, nur **eine** Krümmung haben kann. Es ist aber ohne weiteres möglich, ein Drahtstück so zu biegen, dass es in eine Ebene nicht mehr hineinpasst, es also gleichzeitig von rechts nach links und von oben nach unten gebogen ist. Man nennt eine solche krumme Linie eine **Raumkurve**; ihr Hauptkennzeichen besteht darin, dass sie in jedem Punkt **zwei** Krümmungen hat. Nehmen wir zum Beispiel ein ringförmiges Drahtstück. Solange dieses flach auf der Papierebene liegt, hat es in jedem Punkt nur einen Krümmungsradius. Sobald wir es aber verbiegen, tritt zu der Kreiskrümmung noch eine zweite Krümmung hinzu; nun kann das Kreisstück nicht mehrganz auf der Papierebene aufliegen. Ähnlich verhält es sich auch mir der Krümmung einer Fläche. Nun muss man hier — was jeder Metallarbeiter, Spengler und jede Schneiderin gefühlsmäßig beherrschen, aber kaum je „wissen“ — zwischen nur **gebogenen** und wirklich **gekrümmten** Flächen unterscheiden. Nur gebogene Flächen sind zum Beispiel Zylinder, Kegel und Kegelstumpf; denn alle diese Flächen lassen sich, wie der Fachausdruck lautet, **abwickeln**, das heißt auf völlig eben liegenden Blechen, Stoffen, Papieren aufzeichnen, ausschneiden und zusammenbiegen. So zum Beispiel bestehen die bekannten flachen Herrenstrohhüte, auch „Kreissägen“ genannt, aus solchen nur gebogenen und daher abwickelbaren Flächen. Ganz anders aber ist das bei einer wirklich gekrümmten Fläche, wie sie etwa durch eine Kugel oder eine Ringfläche und so fort versinnbildlicht wird. Um wieder ein allbekanntes Beispiel zu geben: Die schwarzen, steifen Herrenhüte, „Melonen“ genannt, sind von wirklich gekrümmten Flächen begrenzt. Einen solchen Hut kann man nicht „abwickeln“, das heißt ihn in die Ebene ausbreiten, es sei denn, man „treibe ihn ein“, zerschneide ihn und klebe dann die einzelnen Stücke auf ebenes Papier auf.



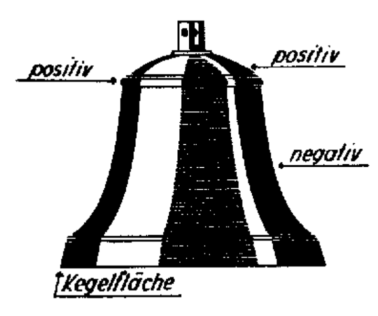
Die Krümmungsradien r_1 und r_2 einer Raumkurve

Natürlich können wir auch hier Krümmungskreise in die Fläche legen, und zwar in jedem Punkt zwei. Beim steifen Hut liegen die Krümmungskreise auf derselben Seite der Fläche und

sind verschieden groß. Bei der Kugel liegen sie gleichfalls auf derselben Seite, sind aber untereinander alle gleich.

Und nun kommt der Hauptunterschied!

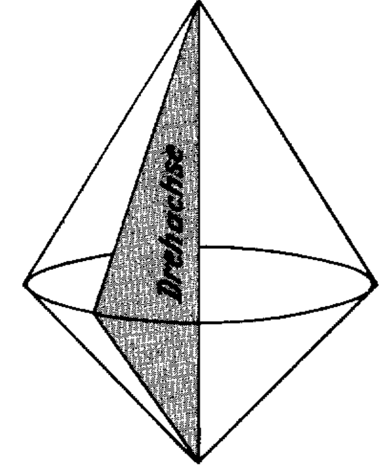
Vorher aber müssen wir uns noch bei Gauß Rat holen. Nach ihm ist die Krümmung einer Fläche $K = \frac{1}{r_1 \cdot r_2}$. Sehen wir uns diese Formel genauer an: Liegen beide Radien auf derselben Seite der gekrümmten Fläche, so sind beide positiv. Daher kommt auch für die Krümmung ein positiver Wert heraus, und wir sprechen somit von einer Fläche mit positiver (erhabener, konvexer) Krümmung. Beispiele für solche Flächen sind Kugel, Eifläche, Ellipsoid (beiläufig im steifen Hut verwirklicht), die Ringfläche, wie wir sie an einem Gummiring von kreisförmigem Querschnitt, also etwa an einem Autoreifen, verwirklicht finden. Unter ihnen gibt es Flächen, die sich dadurch auszeichnen, dass $\frac{1}{r_1 \cdot r_2}$, also der Kehrwert des Produktes der beiden Krümmungsradien, für jeden Punkt gleich ist. Die bekannteste dieser Flächen konstanter positiver Krümmung ist beispielsweise die Kugel. Es fragt sich nur noch, wie eine Fläche aussieht, die eine sogenannte **negative** Krümmung aufweist. Bei ihr muss einer der beiden Krümmungsradien negativ sein, das heißt, jeder muss jeweils auf einer anderen Seite liegen, etwa so, dass an jedem Punkt dieser Fläche eine Krümmung nach innen und gleichzeitig nach außen weist. Körper, die von derartigen Flächen begrenzt sind, gibt es in Hülle und Fülle: Alle sogenannten Hohlkehlen an drehrunden Körpern zeigen diese negative Krümmung, ebenso jede Fläche, die einen sattelförmig gebildeten Körper begrenzt: Ein sehr schönes Beispiel für einen Körper, der von positiven, negativen und abwickelbaren Flächen begrenzt ist, bietet uns die Glocke oder das Weinglas. Unsere Abbildung sagt alles Weitere und zeigt auch, wie die Krümmungsradien für die einzelnen Punkte zu denken sind.



Verschiedene Krümmungen an der Glocke

Eine nette Scherzfrage lautet: „Was ist der Gegensatz von ‚Frühlingserwachen‘?“ Die entsetzenerregende Antwort darauf lautet: „Spätabends rechts schlafen gehen.“ Auf einen solchen Kalauer sollte man eigentlich gefasst sein, wenn man nach dem „Gegensatz zu einer Kugel“ fragt. Wie der Leser aber schon erraten wird, läuft die Beantwortung dieser Frage keineswegs auf einen Unsinn hinaus, denn es gibt tatsächlich einen Körper und damit eine Körperoberfläche, die sich bezüglich der Krümmung vollkommen gegensätzlich zur Kugel verhält. Auch die mathematische Definition dieser Fläche kennen wir schon: Es muss eine Fläche sein, die von konstanter **negativer** Krümmung ist. Man nennt diese Kugel, die gewissermaßen keine und doch eine ist, die „falsche Kugel“ oder die „**Pseudosphäre**“. Sie wurde von **Beltrami** im Jahre 1868 entdeckt.

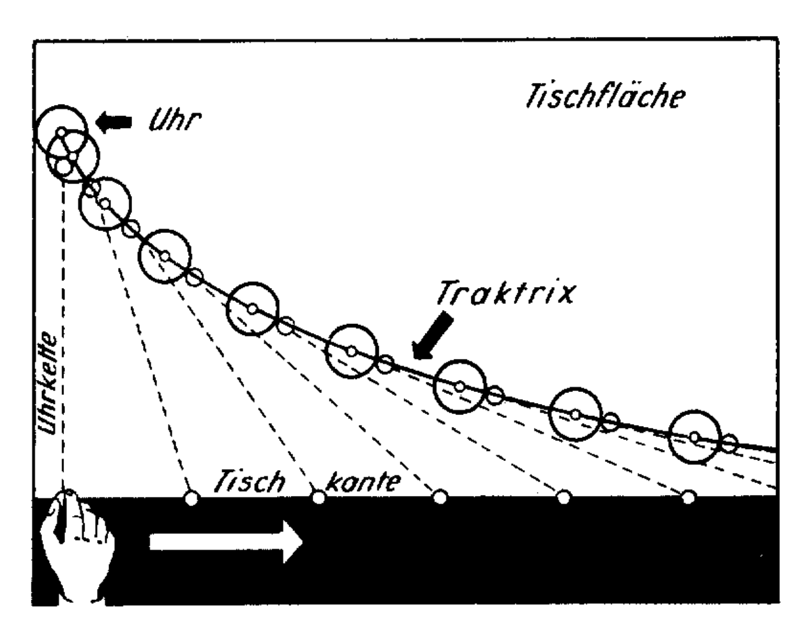
So verzwickt und abwegig wie es nach dem bisher Gesagten scheinen möchte, ist es mit dem würdigen Gebilde der unechten Kugel nun keineswegs. Wie die Kugel, ist auch die Pseudosphäre ein Drehkörper. Derartige Drehkörper, auch Rotationskörper genannt, lassen sich besonders leicht erzeugen. Drehen wir ein Dreieck — mit jedem gewöhnlichen Zeichendreieck kann man diesen Versuch durchführen — um



Ein Drehkörper

eine seiner Seiten, so entsteht ein Doppelkegel, genau so, wie eine Kugel entsteht, wenn man einen Kreis um seinen Durchmesser rotieren lässt. Die Kurve, welche die Scheinkugel erzeugt, ist nun eine ganz merkwürdige Linie, die sich praktisch sehr leicht konstruieren lässt.

Wir brauchen dazu nur eine gewöhnliche Taschenuhr mit einer Uhrkette. Die Uhr wird so auf den Tisch gelegt, dass die ausgestreckte Kette senkrecht auf den Tischrand stößt. Nun fassen wir die Kette an ihrem freien Ende und ziehen sie am Tischrand entlang, zum Beispiel nach rechts. Die Uhr wird dadurch aus ihrer ursprünglichen Lage gebracht und nähert sich in einem zunächst steil abfallenden, dann aber immer flacher werdenden Bogen der Tischkante. Sieht man genauer hin, so wird man unschwer feststellen können, dass etwa der Mittelpunkt der Uhr sich allmählich der Tischkante auf eigentümliche Weise immer mehr nähert. In Wirklichkeit beschreibt der Mittelpunkt der Uhr eine Kurve, welche der Tischkante immer näher kommt, ohne sie aber je erreichen zu können, oder wie der Mathematiker sagt: Die Kurve nähert sich **asymptotisch** der Tischkante. Man nennt die hier entstandene Kurve „**Traktrix**“, auf deutsch etwa „Zuglinie“; auch „Hundekurve“ wurde sie schon genannt, weil ihre Entstehung einigermaßen dem Bilde eines Menschen ähnelt, der an einer straff gespannten Leine einen widerstrebenden Hund hinter sich her zieht.

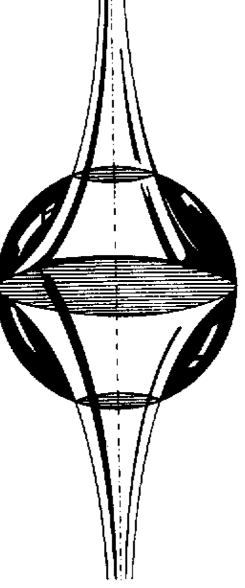


Die Entstehung der Traktrix

So eigenartig diese in der Unendlichkeit verlaufende Kurve auf den ersten Blick anmuten mag, so zeigt sie doch mit unserem biederen, in sich geschlossenen Kreis eine recht nahe Verwandtschaft. Natürlich haben wir mit unserem Uhrkettenbeispiel erst die Hälfte der Kurve konstruiert. Zieht man nämlich von der wieder in die ursprüngliche Lage gebrachten Uhr nunmehr die Kette nach links, so entsteht genau dieselbe Kurve nach links, und sie verläuft ebenfalls in die Unendlichkeit.

Nun betrachten wir die Tischkante als Achse, um die wir unsere Traktrix rotieren lassen. Es entsteht dadurch ein sonderbarer Körper, der etwa so aussieht wie die aufeinandergesetzten Enden zweier Trompeten: Das ist die Scheinkugel oder die unechte Kugel, gewissermaßen der Gegensatz zu unserer echten Kugel.

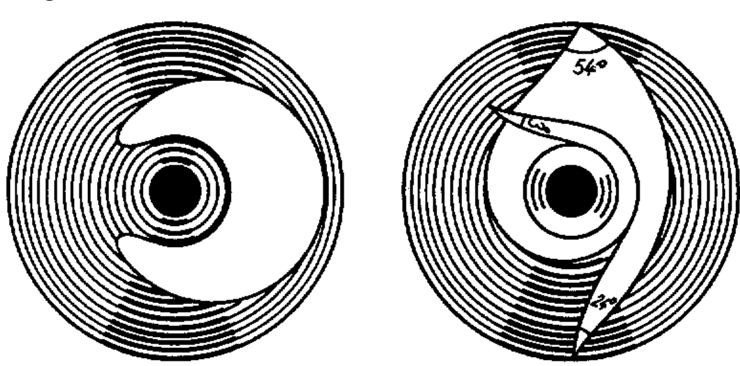
Von der gewöhnlichen Kugel unterscheidet sich die Scheinkugel grundlegend dadurch, dass sie eine scharfe Kante an der Stelle ihres größten Durchmessers hat — eine sogenannte singuläre Linie — und nach beiden Seiten hin in die Unendlichkeit verläuft; denn erst in unendlicher Entfernung, praktisch also nie, schließen sich die beiden Spitzen, in die das Gebilde ausläuft. Dass die unechte Kugel aber doch


Die Pseudosphäre

wesensverwandt mit unserer überall gleichrunden echten Kugel ist, beweisen die mathematischen Formeln für ihre Oberfläche und den Rauminhalt. Die Oberfläche der Pseudosphäre ist genau so groß wie diejenige einer Kugel, deren Durchmesser so groß ist wie der größte Kreis der Pseudosphäre, welchen die singuläre Linie bildet. Bei beiden Gebilden ist nämlich die Oberfläche viermal so groß wie das Quadrat des Radius multipliziert mit der Ludolfschen Zahl (also: $O = 4\,r^2\,\pi$). Ähnlich verhält es sich auch mit dem Rauminhalt: Der ist nämlich halb so groß wie derjenige der Kugel, deren Volumen bekanntlich $\frac{4}{3}r^3\pi$ ist, wohingegen bei der Pseudosphäre das Volumen $\frac{2}{3}r^3\pi$ ausmacht. Und nun schauen wir uns einmal die Krümmungsverhältnisse auf der unechten Kugel der Pseudosphäre an. Diese ist für jeden beliebigen Punkt konstant, das heißt, der Ausdruck $\frac{1}{r_1 \cdot r_2}$ hat für jeden Punkt der „falschen Kugel" denselben Wert. Da aber beide Krümmungsradien auf verschiedenen Seiten — also einer innen, der andere außen — liegen, so ist die Krümmung in jedem Punkt negativ. Wir erhalten daher als Formel für die Krümmung

$$K = -\frac{1}{r_1 \cdot r_2}.$$

Auf dieser Pseudosphäre oder falschen Kugel herrscht wieder eine vollkommen andere Geometrie, eine dritte sozusagen, neben der Geometrie der Kugel und der Ebene. Es ist die sogenannte **hyperbolische** Geometrie. Zeichnen wir auf eine derartige unechte Kugel ein Dreieck — natürlich müssen wir mit den Geraden hier immer in der Oberfläche bleiben —, so zeigt sich, dass die Winkelsumme in diesem Dreieck **kleiner** als 180 Grad ist; ebenso ist natürlich die Winkelsumme eines Quadrates auf dieser Kugel kleiner als 360 Grad. Eine merkwürdige Form nimmt der Kreis auf der Pseudosphäre an. Ebenso sind auf ihr Dreiecke möglich, deren Winkelsumme gleich 0 Grad ist. Und schließlich das Wichtigste: Durch einen außerhalb einer Geraden angenommenen Punkt sind auf der unechten Kugel **mehrere** Parallelen zu dieser möglich! Noch eine Absonderlichkeit: In der Geometrie auf dieser Pseudosphäre ist eine Aufgabe lösbar, um deren Lösung mittels unserer ebenen Geometrie sich die Menschen seit Jahrhunderten vergebens die Köpfe zerbrochen haben. Es ist die berühmte „Quadratur des Kreises", das heißt die Aufgabe, zu einem Kreis von bestimmter Abmessung nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal das flächengleiche Quadrat zu zeichnen.

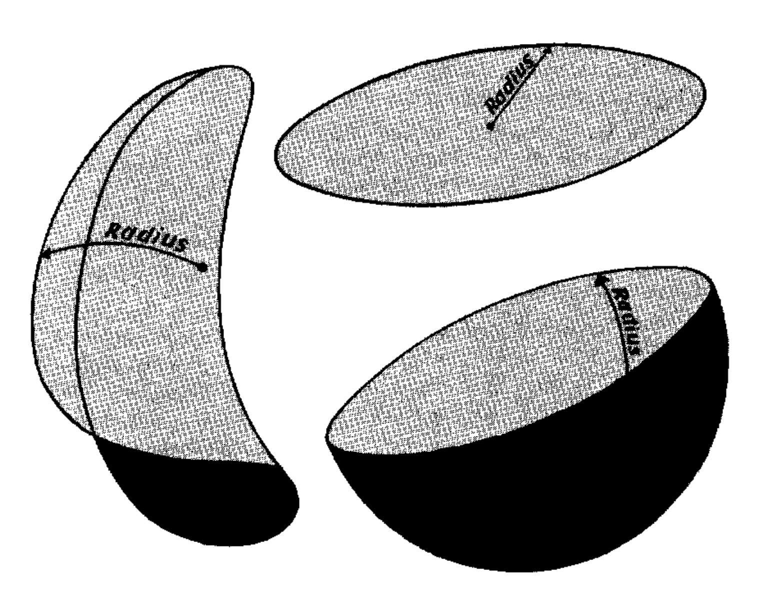


Kreis und Dreieck auf der Pseudosphäre (von der Spitze gesehen)

Wie erwähnt, ist diese Aufgabe in unserer Geometrie nicht möglich, auf der falschen Kugel lässt sie sich aber in einem bestimmten Fall lösen. Man kann nämlich auf ihr denjenigen Kreis, dessen Flächeninhalt gleich der Ludolfschen Zahl π ist, mit Zirkel und Lineal in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandeln.

Selbst nach dem wenigen, was hier von dem uralten Streit um die Parallelen gesagt wird, der uns zu der Merkwürdigkeit der falschen Kugel geführt hat, wird der Leser wohl schon begriffen haben, um was es sich bei diesem so unscheinbar aussehenden Problem eigentlich gehandelt hat: ob nämlich unsere Geometrie stimmt oder nicht. Die Antwort darauf lautet: Unsere Geometrie und mit ihr alle Wahrheiten, die in der Schule gelehrt werden und die wir tausendfach in Physik und Technik anwenden, sind nur **relativ**, das heißt bedingt gültig. Unsere Geometrie der Ebene, die euklidische Geometrie, in der sich durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine Parallele ziehen lässt, in der die Winkelsumme des Dreiecks 180 Grad beträgt, ist ein bestimmter Sonderfall, der nur unter besonderen Voraussetzungen gilt. Daneben aber gibt es noch andere Geometrien, von denen, wie Kugel und falsche Kugel zeigen, zwei besonders wichtig sind. Es sind dies die auf der „echten“ Kugel verwirklichte elliptische Geometrie, in der es zu einer gegebenen Geraden keine Parallele gibt, und die hyperbolische Geometrie auf der Scheinkugel oder Pseudosphäre, in der zu einer gegebenen Geraden unendlich viele Parallelen gezogen werden können. Dementsprechend ist die Winkelsumme des Dreiecks auf der Kugel größer als 180 Grad, diejenige des Dreiecks auf der Scheinkugel kleiner als 180 Grad.

Es ist also des Überraschenden und Wundersamen genug, was uns der Ausflug von der uns vertrauten Ebene auf dem Reißbrett auf die Kugelfläche und die Oberfläche der Pseudosphäre gelehrt hat. Und dass wir mit unserem Wissen jetzt unmittelbar am Tor stehen, hinter dem sich eine der allertiefsten und größten Fragen, die sich die Menschheit je vorlegen konnte, verborgen hält, mag der nächste Spaziergang in den Zaubergarten der Mathematik zeigen.



Wie ein Kreis aussehen kann!
Rechts oben: Kreis in der ebenen, euklidischen Geometrie
Rechts unten: Kreis auf der Kugeloberfläche, (elliptische Geometrie)
Links: Kreis auf der Pseudosphäre (hyperbolische Geometrie). Alle Figuren sind perspektivisch gezeichnet

Bevor wir ihn jedoch antreten, wollen wir noch etwas kennen lernen, das gemeinhin oft als unvorstellbar hingestellt gilt, das wir aber nach dem vorher Gesagten unschwer erfassen und verdauen können. Es ist das Geheimnis vom **gekrümmten** Raum.

Der Leser wird den merkwürdigen Ausdruck „Gekrümmter Raum“ sicher schon gehört haben und mit größter Wahrscheinlichkeit über dieses unverständliche Wortgebilde sofort zur Tagesordnung übergegangen sein. Denn ein gekrümmter Raum erscheint dem normalen Menschengehirn zunächst einfach unvorstellbar. In Wirklichkeit findet sich am gekrümmten Raum aber nicht soviel Absonderliches. Denn auch diese Vorstellung wird uns sofort verständlich, wenn wir uns nur die Mühe nehmen wollen, die Brille des alltäglich-beengten Denkens abzulegen, über Vorurteile, die sich in uns eingenistet haben, hinwegzusehen und die Dinge und Erscheinungen um uns so zu sehen, wie sie sich wirklich offenbaren.

Was ein Punkt ist, haben wir vor wenigen Seiten aus der einfachen, aber nicht anfechtbaren Erklärung des alten Euklid gelernt. Er ist also ein Gebilde, das nichts anderes hat als einen

„Ort“. Der Punkt hat weder Länge noch Breite und Tiefe, woraus auch hervorgeht, dass im Innern des Punktes gewissermaßen aus „Platzmangel“ gar nichts vorhanden sein kann. Ein Punkt hat überhaupt keine Abmessung, keine Dimension, wie man sagt; er ist also “nullter Dimension“, wie der Fachausdruck lautet. Es wäre barer Unsinn, danach zu fragen, ob ein Punkt gerade oder gekrümmt sei. Ein Punkt ist eben nichts und ist gewissermaßen nur „da“. Anders verhält es sich schon mit der Linie. Sie weist zwar auch noch weder Dicke oder Breite auf, quer durch jede Linie ist es gewissermaßen auch „Null“, dafür aber haben wir schon **eine** messbare Abmessung, die Länge. Also kann man bei einer Linie von einem „eindimensionalen“ Gebilde reden, allerdings mit einer gewissen, und zwar sehr wesentlichen Einschränkung: Eine Linie kann nämlich gerade oder gekrümmt sein. Nun ergibt sich folgende Merkwürdigkeit: Nur dann, wenn die Linie wirklich gerade ist, kommt man mit **einer** Dimension aus, nämlich mit einer einzigen Längenangabe. Sowie aber die Linie nur die geringste Krümmung aufweist, ist es mit der Eindimensionalität eigentlich aus!

Denn wir haben keinen Platz mehr für die Krümmung! Wir brauchen dann schon die Fläche, also ein Gebilde, das **zwei** Dimensionen, nämlich Länge und Breite, aufweist. Und wir kommen zu der etwas überraschenden Feststellung, dass es eigentlich nur die Gerade ist, die tatsächlich eine einzige Dimension, nämlich die Länge, besitzt.

Doch nicht genug damit: Unsere Überraschung wird wahrscheinlich in Verblüffung übergehen, wenn wir erfahren, dass es Linien, doppelt gekrümmte Linien gibt, die nicht einmal in der Ebene mehr Platz haben, sondern nur mehr im Raum, also im Dreidimensionalen, untergebracht werden können. Eine solche Linie ist zum Beispiel die Schraubenlinie, die nur im Raum denkbar ist, wie alle Linien, die eine „doppelte Krümmung“ aufweisen, also sich zum Beispiel gleichzeitig von oben nach unten, aber auch von rechts nach links krümmen. Wie steht es aber damit bei den Flächen? Ähnlich, aber doch wieder anders, denn nur eine geradegestreckte Fläche, eine sogenannte Ebene, hat zwei Abmessungen — Länge und Breite — und kann demnach im Zweidimensionalen untergebracht werden. Kommt aber eine Krümmung dazu, brauchen wir sofort wieder den Raum. Eine Zylinder- oder Kegelmantelfläche gehört einfach in den Raum, denn sie kann nur räumlich dargestellt werden.

Noch mehr gilt das für die gekrümmten Flächen, wie etwa für die Kugeloberfläche, die Oberflächen der Rotationskörper und so fort.

Auch sie müssen, wie der Fachausdruck lautet, stets in einem Raum „eingebettet“ sein.

Unterbrechen wir unseren Gedankengang kurz und wiederholen wir:

- Ein Punkt ist **dimensionslos**, ist nichts als ein „Ort“ und braucht keinen Raum. Wir nennen ihn einen $\boldsymbol{R_0}$[1)].
- Die Gerade zeigt eine einzige Abmessung; wir wollen sie daher den $\boldsymbol{R_1}$ nennen.
- In der Ebene mit ihren zwei möglichen Abmessungen können wir uns den $\boldsymbol{R_2}$ vorstellen.
- Und unser gewöhnlicher dreidimensionaler Raum muss demnach die Bezeichnung $\boldsymbol{R_3}$ tragen.

[1)] Sprich: „Er-Null“, geradeso, wie es späterhin „Er-Eins“, „Er-Zwei“ und so fort heißt. Natürlich ist damit nur eine Bezeichnung, ein Name geschaffen, keine mathematisch brauchbare Formel!

Wir haben soeben gefunden, dass gewisse Flächen, die sonst als Ebenen in dem ihnen heimischen R_2 Platz fänden, im nächsthöheren R_3 eingebettet sein müssen, dass also die Einteilung von Linien in eindimensionale, von Flächen in zweidimensionale „Räume“ auch ihre sehr beachtlichen Ausnahmen hat.

Jetzt aber nehmen wir unseren heimischen R_3, den dreidimensionalen Raum, ein wenig schärfer aufs Korn. Zwei Vorstellungen beherrschen als geradezu unbeweisbar-selbstverständliche Dogmen unsere Vorstellung. Zunächst einmal stellen wir uns den uns umgebenden Raum immer und unbedingt **gerade** vor.

Auf unserem Reißbrett machen wir einen Punkt, errichten in ihm ein Koordinatensystem, hier natürlich ein dreiachsiges, an dem wir Breite, Höhe und Tiefe ablesen können. Dazu müssen wir — wie bei unserem früher erwähnten Aquarien-Beispiel — natürlich drei Achsen haben: eine quer von links nach rechts vorüberziehende waagerechte x-Achse, eine senkrecht nach oben und unten weisende y-Achse und eine von vorn nach hinten verlaufende z-Achse. Alle drei Achsen verlaufen schnurgerade in alle Unendlichkeit, stets die einmal gegebene Richtung einhaltend, nie um Haaresbreite abweichend oder sich krümmend, gerade, unbeirrbar gerade. **Schiller** hat uns in seinem „Spruch des Konfuzius“ eine prachtvolle Darstellung dieser Raumvorstellung gegeben:

Dreifach ist des Raumes Maß:
Rastlos fort ohn’ Unterlass
Strebt die **Länge** fort ins Weite,
Endlos gießet sich die **Breite**
Grundlos senkt die **Tiefe** sich.

Gerade, schnurgerade und, um auf unsere Bezeichnungsweise zurückzukommen, so gerade wie die Ebene in der von Euklid aufgestellten Geometrie dehnt sich unser R_3 nach allen Richtungen in die Unendlichkeit aus. Es ist also ein sogenannter gerader, **euklidischer** (oder parabolischer) Raum.

Wir wissen aber schon: Die euklidische Geometrie der Ebene ist nur eine der möglichen Geometrien, bei der alles ganz einfach und übersichtlich liegt, in dem die Winkelsumme des Dreiecks „ausgerechnet“ 180 Grad beträgt und in dem sich Parallelen überhaupt nie schneiden, mag man noch so weit in die Unendlichkeit vorstoßen. Es wäre also gedankenlos, zu schließen, unser Raum müsse auch unbedingt euklidisch sein.

Die Sache beginnt jetzt, etwas ungemütlich zu werden. Wir haben Berge unmöglichen Vorstellungsschuttes hinweggeräumt. Dafür tauchen jetzt p1ötzlich Möglichkeiten auf, die durchzudenken unserem alltäglich ausgerichteten Hirn Schmerzen bereitet. Dass der Raum irgendwie gekrümmt sein kann, ist ja ohne weiteres klar. Aber wie soll man sich einen krummen Raum eigentlich vorstellen? Und vor allem: Gibt es irgendwelche praktische Angaben und Beobachtungen, nach denen man beurteilen kann, ob der Raum wirklich gekrümmt **ist** oder nicht?

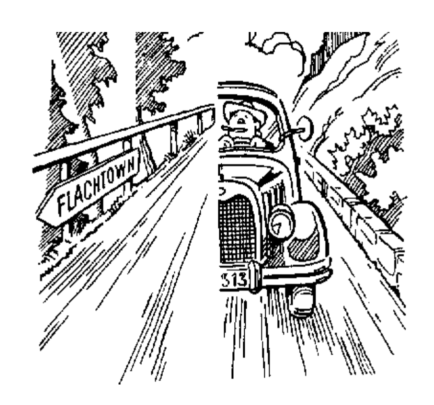
Beantworten wir zuerst die letzte Frage: Natürlich ließen sich Tatsachen finden, die beweisen, ob unser Raum gerade oder gekrümmt, euklidisch oder nichteuklidisch ist. Das „Kriterium“, das Kennzeichen und Hauptmerkmal, ist sogar sehr einfach: Man braucht nämlich nur zu bestimmen, ob die Winkelsumme möglichst groß gewählter Dreiecke genau 180 Grad hat oder ob mehr oder weniger herauskommt. Schon der große Gauß, der natürlich die ungeheure Wichtigkeit dieser Antwort und ihrer Folgerungen sehr richtig einschätzte, maß nach, und

zwar ein Dreieck von 69, 85 und 107 km Seitenlänge, nämlich das Dreieck Hohenhagen — Brocken — Inselsberg. Er kam aber zu keinem genauen Ergebnis, vermutlich aus zweierlei Gründen. Zunächst kann ja auch dieses immerhin ansehnliche Dreieck zu klein gewesen sein.

Ein Dreieck Sonne — Betelgeuze — Mizar[1)], also mit Seitenlängen, die nach Lichtjahren zählen, wäre zweckmäßiger gewesen. Dann aber — und das ist der Hauptgrund: Vielleicht ist es, selbst wenn wir davon absehen, dass alle unsere Messinstrumente „euklidisch“ sehen und messen, überhaupt gar nicht möglich, aus unserem R_3 heraus darüber zu entscheiden, ob dieser R_3 tatsächlich gekrümmt oder eben ist. Die Teichschnecke, die augenlos tief unten im Grundschlamm ihres Tümpels wohnt, kann sich eben keinen Begriff von Hochgebirgszauber und Gletscherschönheit machen! Wir aber wissen schon: Ist unser R_3 gerade, das heißt euklidisch, so hat er eben noch in einem R_3 „Platz“. Ist er aber gekrümmt — wir brauchen hier nur das an der krummen Linie, an der gekrümmten Fläche Gefundene zu erweitern, das heißt auf den Raum anzuwenden —, kann er im R_3 nicht mehr „eingebettet“ sein, er muss also in einen vierdimensionalen Raum, in einen R_4 hinein ... Oder umgekehrt: Wären wir in der vierten (mathematischen) Dimension zu Hause, so könnten wir auf den ersten Blick entscheiden, ob dieser dreidimensionale Raum, von dem die Menschen behaupten, er erfasse mit seiner geraden, euklidischen Unendlichkeit schlechthin alles Vorhandene, wirklich gerade oder ob er gekrümmt ist. Nun ist uns aber das Reich der vierten Dimension vollkommen verschlossen, unvorstellbar und nur auf rein mathematischem Weg greifbar.

Unsere Frage, ob unser Raum gekrümmt oder gerade sei, muss daher offen bleiben. Wir haben nur Vermutungen, kaum einen Wahrscheinlichkeitsbeweis! — Mit steigendem Entsetzen wird der Leser feststellen, dass der Gang unserer Gedanken von der so nebensächlich und harmlos aussehenden Frage nach dem gegenseitigen Schneiden oder Nichtschneiden von Parallelen unaufhaltsam zu Abgründen hinführt, in denen alle unsere Vorstellungen rettungslos zu versinken drohen. Wir steuern auf dem eingeschlagenen Wege einer ungeahnten Katastrophe zu, die mit der völligen Auflösung unserer alltäglichen Vorstellungen enden wird. Der verhängnisvolle Strudel, der uns ergriffen hat, ist nicht mehr aufzuhalten. Aber bevor wir ans Ziel kommen, wollen wir uns an einem einfachen, jederzeit herstellbaren Bastelwerk die überraschende Bestätigung dafür holen, dass es von jenen schauerlichen, unser ganzes Denken auffressenden Grenzgebieten, deren Umrisse wir schon in der Ferne drohend vor uns aufsteigen sehen, zum allergewöhnlichsten Alltag gar nicht so weit ist.

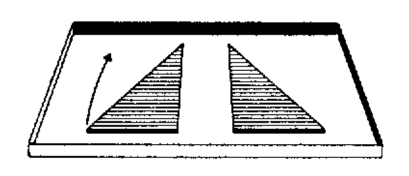
[1)] Betelgeuze ist der linke oberste Stern im Orion, im schönsten unserer Sternbilder. Sie ist leicht an ihrer leuchtendroten Farbe zu erkennen und etwa 500 Lichtjahre von uns entfernt. Mizar ist der allbekannte Deichsel-Stern im Sternbilde des Großen Wagen, ein Doppelstern, und zwar steht über dem eigentlichen Hauptstern ein zweiter kleinerer, den aber gute Augen ohne Instrument sehen können. Daher wird dieses „Reiterchen“ mitunter auch „Augenprüfer“ genannt. Ungefähr 80 Lichtjahre sind es von uns bis zu diesem mächtigen Sonnensystem, das sich aus mehreren Sonnen aufbaut.



Das Ding, das nur eine Seite hat

Bilder, Modelle und so fort sind erfahrungsgemäß um so aufschlussreicher und deutlicher, je einfacher sie sind. Wie von einem guten, der mathematisch-geometrisch interessierten Menschheit besonders wohlwollenden Geist ersonnen, gibt es in den schwierigen Grenzgebieten, denen wir nun zueilen, ein Modell, das in bezug auf Einfachheit, leichte Beschaffungsmöglichkeit und Tiefe der an ihm zu gewinnenden Einblicke so gut wie beispiellos dasteht. Wir gehen von dem aus, was wir bereits über die Verhältnisse in gewissen Räumen gesagt haben. Obgleich wir in einem dreidimensionalen Raum zu leben gezwungen sind, können wir uns von einfacheren „Räumen“ doch ausgezeichnete Modelle herstellen, vor allem von der Ebene, dem R_2. Wir legen einfach ein Blatt Papier vor uns, und das „Modell“ eines ebenen, also euklidischen R_2 ist fertig, das sogar ziemlich vollkommen wird, wenn wir uns die stets messbare Dicke des Papiers einfach wegdenken. Nun noch ein Phantasiegemälde, das wir uns erlauben wollen. Es besteht in der Annahme von „Flachwesen“, wie sie der von uns schon genannte Beltrami erfunden hat. Das sollen streng zweidimensionale Lebewesen sein, die nur die Fläche kennen, nur in ihr zu leben imstande sind und die, genau so wie wir, von höheren Räumen keine Vorstellung haben, unsere dritte Dimension überhaupt nicht kennen. Es ist natürlich ziemlich gleichgültig, wie wir uns solche „Flachwesen“ vorstellen; man kann sie sich als unendlich dünne Ameisen oder — wie einmal einer meiner Freunde nicht ganz unzutreffend sagte — als ausgehungerte Wanzen denken, die in der schmalsten Ritze noch Platz finden; für unsere Untersuchungen kommt sozusagen nur die „seelische Einstellung“ der Flachwesen in Betracht, die so ist, dass sie sich keine dritte Abmessung, keine „Dicke“ vorstellen können, weil es für sie keine „dritte Richtung“, kein Oben und Unten, sondern nur ein Vorn und Hinten, ein Rechts und Links gibt.

Aber neben diesem Mangel an einer ganzen Dimension fehlt dem „Flachländer“ noch etwas, was wieder eine Folge seiner beiden einzigen Dimensionen ist, in denen er leben muss. Wir legen ein Zeichendreieck auf den Tisch und bedecken es mit einer Glasplatte. Der Zwischenraum zwischen Tisch und Glas ist nun ein neues Bild unserer zweidimensionalen Welt. Das Dreieck ist in ihr, wie sofort ersichtlich, auf merkwürdige Weise „eingesperrt“. Man kann es zwar hin und herschieben, im Kreise drehen. Aber **herausklappen**, **umlegen** kann man es nicht mehr! Warum? Weil dazu die Hilfe der dritten Dimension nötig ist, weil man dazu das Dreieck „in die Höhe“ klappen muss, wobei es eben — wenn auch nur auf wenige Sekunden — durch den dreidimensionalen R_3 muss. Das Dreieck muss also, solange es sich im R_2 befindet, unbedingt auf der Seitenfläche liegen bleiben, auf die es hingelegt wurde. Und auf unsere „Flachländer“ übertragen: Sie können sich niemals in ihrer Welt „umdrehen“. Denken wir sie auch nur einigermaßen ausgedehnt, so müssen sie z. B. zeitlebens auf dem Bauche liegen, wenn sie in



Was im zweidimensionalen Raum nicht möglich ist: Umklappen!

dieser Lage auf die Welt gekommen sind, Auf dem Bauche krabbelnd, verbringen sie ihr ganzes Leben, auf dem Bauch liegend muss man sie „begraben“. Geradezu ungeheuerliche Folgerungen ergeben sich aus diesem Nichtumdrehenkönnen der Flachländer, zumal wir Menschen in unserem R_3 genau so unter einem peinlichen Zwang stehen, von dem wir allerdings kaum etwas ahnen, weil er alltäglich und selbstverständlich ist. Wir kommen darauf noch zurück.

Jetzt zu unseren Flachländern und ihrer papiernen R_2 Welt.

Ein Flachländer krabbelt in seiner vor uns liegenden „Welt“ herum. Es geht ihm dabei genau so wie etwa einem Ohrwurm, den wir zwischen zwei Glasplatten eingeschlossen haben. Behält unser Lebewesen eine Weile seine Richtung bei, so gibt es bald ein „Bis hierher und nicht weiter !“, wenn es nämlich den Rand des Papierblattes erreicht hat. Dann heißt es rechtsum oder linksum machen und weitermarschieren. Allmählich wird der Flachländer erkennen, dass er immer wieder an den gleichen Ort zurückkommt. Der Schluss, der daraus zu ziehen ist, ist klar und einfach. Der Flachländer wird sagen: „Ich befinde mich in einer endlichen, das heißt allseits begrenzten Welt! Ich mag hinkrabbeln, wohin ich will, ich komme sehr rasch an eine Grenze, über die ich nicht hinauskann.“ Sonstige Rückschlüsse auf die Gestalt seiner Welt kann der Flachländer nicht ziehen. Vom Vorhandensein eines Raumes, in dem seine Welt „eingebettet“ liegt, kann er sich keine Vorstellung machen, denn durch nichts verrät sich ihm auch nur die Möglichkeit einer dritten Abmessung, also des Raumes, unseres R_3.

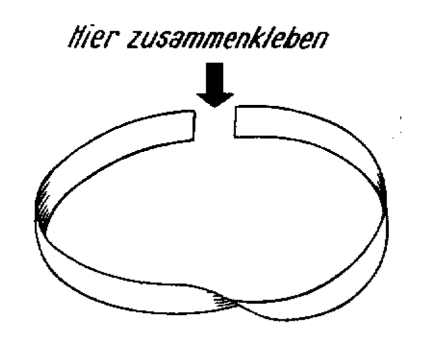
Wir biegen jetzt das lang und schmal gedachte Papierblatt — die Welt der Flachländer — etwas ein, so dass die beiden Enden in die Höhe ragen. Und wieder krabbelt unser Flachländer in seiner von uns jetzt „verbogenen“ Welt herum. Selbst dann, wenn wir von aller Einwirkung der Schwerkraft absehen, hat sich die Welt für ihn auf einmal in einer unerklärlichen Weise verändert, so als ob sie verzaubert wäre.

Es ist einfach zu toll: Solange sich der Flachländer nämlich in der Mitte seiner Welt aufhält, bleibt alles beim alten. Sowie er sich aber den entfernteren Grenzen nähert, stellen sich unglaubliche, bislang nie vorstellbar gewesene Erscheinungen ein. Die „Gegenstände“ im R_2 verlieren nach einer Richtung plötzlich ihre Sichtbarkeit. In der — eben gebliebenen — Weltmitte ist alles schon von weitem sichtbar. An den (aufgebogenen) Enden sind die Augen jedoch in einer bestimmten Richtung wie mit Blindheit geschlagen! Vorhandene Gegenstände werden erst sichtbar, wenn man fast schon mit der Nase auf sie stößt. — Wir lächeln natürlich belustigt; denn wir wissen ja, dass der immer völlig geradlinig sich fortpflanzende Lichtstrahl sich nicht in die verbogene R_2 hineinbiegen lässt. Dort also, wo R_2 gekrümmt ist, also dort, wo sich das Papier aufwärts biegt, kann man nur ein kurzes Stück vor sich hin schauen. Es ist genau so, wie man durch den Schlitz zwischen zwei, etwa einen Millimeter weit voneinander gelagerten, ebenen Blechen noch gut meterweit durchsehen kann, wohingegen die ganze Geschichte sofort völlig undurchsichtig wird, wenn beide Bleche gebogen sind und man in der Richtung der Biegung durchsehen will. Unser Flachländer aber kann sich das, da er das Geheimnis der Krümmung, die ja den Raum voraussetzt, nicht kennt, unter keinen Umständen erklären. Voll Entsetzen krabbelt er seine Welt ab. Aber vergebens! Sie ist nach wie vor begrenzt endlich. Auch die Längenmaße, die unser Flachländer vorhin ausgemessen hat, stimmen, nichts hat sich verändert — und doch ist ein unfassliches, unvorstellbares Wunder geschehen, für das unser R_2-Mann einfach überhaupt keine Erklärung finden kann.

Aber wir, in unserer gottähnlichen Rolle, die uns hier Schicksalsgewalt und Vorsehung spielen lässt, gönnen im Vollgefühl unserer beinahe an Allmacht grenzenden Stärke dem

armen Flachländer noch keine Ruhe. Wir stellen ihm listig eine neue Falle, in der er mit seinem zweidimensionalen Begriffsvermögen wieder rettungslos zappelnd hängen bleiben muss. Wir biegen jetzt nämlich unseren Papierstreifen ganz zusammen, bis ein Ende das andere berührt, und kleben beide aneinander, so dass ein Papierring entsteht, dessen Klebestelle wir uns wegdenken wollen. Wieder bleibt das Spiel der Schwerkraft unberücksichtigt. Unser Flachländer aber wird alsbald blass vor Entsetzen. Schon wieder hat sich seine Welt von Grund aus verändert, denn selbst in der Mitte seines Papierstreifens, der bisher in einer Ebene gelegen war, ist jetzt eine Verbiegung eingetreten, da wir den Streifen zu einem Ring, richtiger gesagt, zu einem Stück eines Zylindermantels zusammengefügt haben. Wir haben also das geschaffen, was man etwa eine „Zylinderwelt" nennen könnte. Und die Folgen davon sind es, die unseren armen Flachländer so namenlos erschrecken. Die Sichtbarkeit der Gegenstände ist jetzt innerhalb seiner Welt in einer Richtung auf ein Mindestmaß gesunken. Fortwährend gibt es Zusammenstöße, da man in dieser Richtung kaum die Hand vor den Augen sieht, auch in vollem Mittagssonnenschein nicht! Unser Flachländermann aber tut das Klügste, was er in seiner Lage machen kann: er beginnt nämlich, neuerlich seine Welt zu untersuchen. Vor allem prüft er nach, ob die Länge seiner Welt in der Richtung, in der alle Sicht so rätselhaft versagt, noch stimmt. Aber er findet keine Grenzen mehr. Er kann so lange weiterkrabbeln, wie er will, in dieser Richtung kommt er niemals an eine Grenze, an ein Ende! Zwar stellt sich bald heraus, dass bei diesem Marsch um die Welt immer wieder altbekannte Orte auftauchen. Von einer „Unendlichkeit" kann demnach keine Rede sein, wohl aber von einer Unbegrenztheit! Und so muss unser Flachländer feststellen: „Unsere Welt ist wohl endlich geblieben, aber in einer Richtung ist sie unbegrenzt geworden."

Wir ersinnen jetzt etwas Teuflisches, indem wir unseren Papierring quer durchschneiden. Dann drehen wir **ein** Ende herum, so dass die Innenseite an diesem Ende zur Außenseite wird und umgekehrt. Jetzt erst kleben wir beide Enden zusammen und denken uns die Klebestelle wieder weg. Ebenso nehmen wir an, dass unsere Flachländer von diesem neuen tückischen Eingriff in ihren R_2 nichts erfahren haben.



Eigenartige Veränderungen der R_2-Welt

Dieser R_2 ist also im Grunde eigentlich unverändert geblieben, obwohl wir ihn merkwürdig verkrümmt haben, so dass er an einer Stelle eine sogenannte Verwindung zeigt, wie unsere Abbildung es veranschaulicht.

Bevor wir unseren Flachländer in seinen veränderten R_2 begleiten, wollen wir ihn uns einmal genauer ansehen. Da er unendlich dünn ist, so ist er völlig durchsichtig, genau so wie etwa Gold durchscheinend und durchsichtig wird, wenn man es in schier unendlich dünne Häutchen auseinander hämmert. Obgleich der Flachländer also rein zweidimensional ist, also nur lang und breit sein kann, ohne eine Dicke aufzuweisen, können wir in unserem dreidimensionalen R_3 ein sehr naturgetreues Abbild von ihm herstellen.

Zu diesem Zweck denken wir uns das Bild irgendeines gefilmten Menschen, meinetwegen eines Filmlieblings, auf gewohnte Weise, also genau so wie im Kino, auf die Wand projiziert. Dieser Auffangschirm an der Wand bestehe aber nicht aus einer undurchsichtigen Aluminiumfolie oder einer der üblichen undurchsichtigen Stoffe oder Leinwandauflagen, sondern aus einer großen Mattscheibe, also einem feingeätzten Glas, wie man es auch früher in der Photographie zum Auffangen und Einstellen des Bildes brauchte. Dieses auf der Mattscheibe aufgefangene „Lichtbild an sich" entspricht nun fast genau unserem Flachländer. Sehen wir uns das Bild von vorn, also vom Zuschauerraum aus, an, so wird es alle natürlichen

Verhältnisse zeigen. Der Aufgenommene wird tatsächlich die rechte Hand rechts haben, den Säbel, sofern er einen trägt, an der linken Seite führen, und so fort. Treten wir nun hinter den durchscheinenden Mattscheibenschirm, so sehen wir genau dasselbe Bild; nur ist dieses jetzt, wie der Fachausdruck lautet, **seitenverkehrt**, das heißt, rechts ist gegen links vertauscht. Infolgedessen trägt, von hier aus gesehen, der Aufgenommene zum Beispiel den Säbel auf der rechten Seite. Es ist wie bei einem Spiegelbild. Und wer sich das alles nicht vorstellen kann, der male einfach mit Tinte und Pinsel einen Mann auf ein großes Stück Löschpapier. Hier schlägt die Tinte durch und erzeugt auch auf der Rückseite ein halbwegs erkennbares Bild, das dem auf der anderen Seite ziemlich gleich sein wird.

Beide Bilder unterscheiden sich voneinander nur durch die Vertauschung der Seiten, das heißt eines dieser Bilder wird immer seitenverkehrt sein. Genauso ist es nun mit unserem Flachländer, der — wie unser projiziertes Kinolichtbild auch — keine Dicke hat, so dass die Vorderseite mit seiner Rückseite zusammenfällt.

Inzwischen aber hat sich unser Flächenmensch in seiner veränderten Umwelt etwas genauer umgesehen. Bald kommt er auf merkwürdige Veränderungen, vor allem auf zeitweiliges Auftauchen und ebenso rätselvolles Verschwinden lange nicht mehr gesehener Grenzen. Unser R_2-Mann entschließt sich demzufolge, seine Welt wieder einmal durch eine Reise genauer zu untersuchen. Zunächst stellt er fest, dass sich seit der letzten Vermessung eigentlich nicht viel geändert hat. Die Sichtbarkeit der Dinge in der Marschrichtung — also entlang der Längenausdehnung unserer Kreisschleife — ist gering, man sieht alles erst aus nächster Nähe. Dafür kann man — so wie früher — in der darauf senkrecht stehenden Querrichtung alles schon von weitem schauen. In dieser Richtung ist die Welt auch endlich wogegen in der ersten Richtung die alte Unbegrenztheit zweifellos fortbesteht.

Richtig trifft auch unser Flachländer nach der Reise um diese jetzt so eigenartig „verbogene" R_2-Welt in seiner Heimat wieder ein. Aber schon der erste Anblick des Heimgekehrten stürzt die zu Hause Gebliebenen in namenloses Entsetzen:

Unser Reisender ist nämlich seitenverkehrt nach Hause gekommen!

Was früher an ihm rechts war, ist jetzt links und umgekehrt! Rechts trägt er das Herz, rechts die Uhr. Aber wenn er schreibt oder zeichnet, greift er mit der Linken (normalerweise seien die Flachländer Rechtshänder wie wir) nach Feder oder Stift.

Man traut seinen Augen nicht, bestürmt den Reisenden mit Fragen, was ihm denn um Himmels willen zugestoßen sei, wo man seinen ganzen Organismus geradezu umgekrempelt habe. Aber der Flachländer, dem das grenzenlose Erstaunen und die Verblüffung seiner Landsleute völlig unerklärlich vorkommen, weiß nichts zu sagen. Nicht das geringste habe er bemerken können; mit Ausnahme der eigenartigen Erscheinung, dass die Zeiger seiner Uhr sich eines Tages plötzlich in entgegengesetztem Sinne bewegt hätten, ohne dass er irgend etwas an dem Mechanismus verändert habe.

Tagelang rast das Entsetzen unter den Flachländern. Dann entschließt man sich, aufs neue einen Mann auf die Reise um die Welt zu schicken. Da aber kein Gelehrter Lust hat, den Höllenspuk am eigenen Leibe zu erleben, wählt man einen zweidimensionalen Krüppel, der halbtaub, halbblind ist und sich als Drehorgelspieler mühsam seine paar R_2-Groschen zusammenleiert. Er weiß von gar nichts, hat von der ganzen fürchterlichen Erregung nichts gehört, sondern spielt nur tagein, tagaus seine Orgel, die er natürlich mit der rechten Hand dreht. Mit seiner Orgel, von der er nicht lassen will, zieht der Alte frohgemut aus. Erst nach

langer Zeit kehrt er heim. Es sei ausgezeichnet gegangen, erklärt er den Zurückgebliebenen, die ihn mit entsetzt verzerrten Gesichtern anstarren. Denn auch der alte Bettler trägt das Herz **rechts**, und er dreht mit der **linken** Hand die Orgelkurbel, mit derselben Hand, die früher seine rechte war und an deren Fingern deutlich die durch jahrzehntelanges Gekurbel entstandenen Schwielen zusehen sind. Also ist auch der Orgelspieler seitenverkehrt nach Hause gekommen, ohne von der totalen Umkrempelung seines Körpers und seines Musikinstrumentes irgend etwas bemerkt zu haben ...

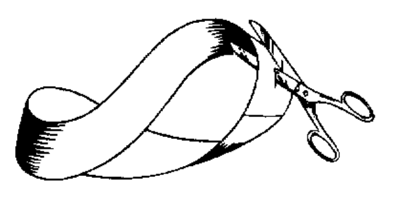
Der geneigte Leser glaubt vielleicht, wir wollten ihm einen geradezu vierdimensionalen Bären aufbinden. In Wirklichkeit aber hat sich nur unser Gottähnlichseinwollen bitter gerächt. R_2 hat uns eine Falle gestellt, in der sich unser Vorstellungsvermögen wie eine Maus gefangen hat. Und wer das wundervoll-seltsame Ding, das wir aus unserer Papierschlinge zusammengebastelt und in Gedanken mit „Flachländern“ bevölkert haben, noch nicht kennt, wird künftig bei allen weiteren verblüffenden Versuchen erst recht verwundert den Kopf darüber schütteln, wie nahe selbst unser nüchterner Alltag von unheimlich-wirklichen Gespenstern umgeben ist.

Nennen wir das Kind gleich beim richtigen Namen. Die Papierschleife, die wir schließlich zusammengeklebt haben, führt nach dem deutschen Mathematiker **Möbius**, der als erster auf dieses lächerlich unheimliche Ding kam, den Namen **Möbiussches Band**. Zu seiner Herstellung eignet sich am besten ein. Papierstreifen von etwa 6 cm Breite und 60 bis 80 cm Länge, den wir aus einer möglichst großen Zeitung ausschneiden, Der entscheidende Kniff besteht darin, dass wir vor dem Zusammenkleben **ein** Ende, aber wohlgemerkt **nur ein** Ende, um 180 Grad umwenden. Damit haben wir aber etwas Tolles angerichtet; denn durch das Drehen eines Bandendes vor dem Zusammenkleben hat unser Papierstreifen — und zwar **mathematisch streng**! — **seine zweite Seite verloren**. **Er hat infolgedessen nur eine Seite !** Kurioserweise hat diese einseitige Fläche auch nur noch eine einzige Begrenzungslinie — Kaum zu fassen! — Der Leser probiere es einmal aus!

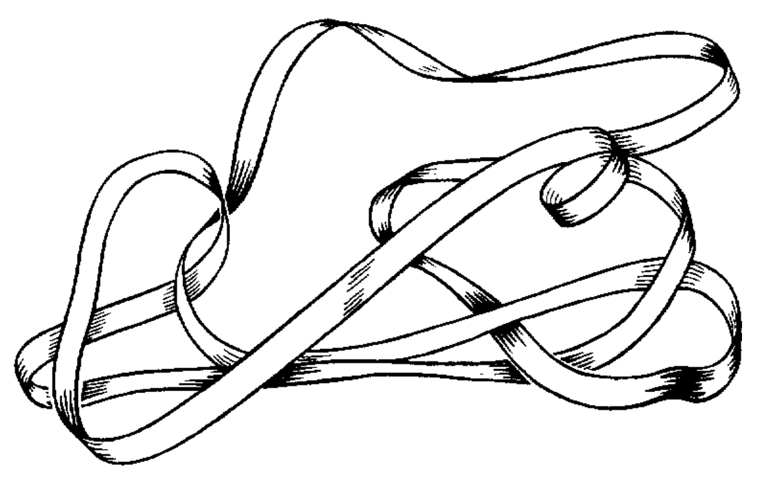
Maler „Klecksel“, dem wir diese merkwürdige Geschichte erzählen, glaubt uns den „Schwindel“ nicht. Zum Beweis schickt er sich an, die nach seiner Meinung unbedingt vorhandenen beiden Seiten verschieden farbig zu bemalen. — Doch umsonst ist seine Mühe! Für die zweite Farbe ist einfach keine Fläche da! — Eine Fläche geht gewissermaßen in die andere über, so dass tatsächlich nur eine einzige da ist. Oder aber: Setze ich ziemlich in der Mitte des Bandes einen Bleistift an und ziehe mit diesem der Länge nach einen Strich auf dem Bande, so komme ich damit wieder an den Ausgangspunkt zurück. Versuche es selber, lieber Leser!

Der Verstand aber bleibt einem stehen, wenn man den zweiten Versuch durchführt.

Zerschneidet man das Möbiussche Band, wie die Abbildung zeigt, so zerfällt das Band schließlich nicht etwa in zwei Teile, sondern bleibt **in einem Stück beisammen**. Es wird nur **länger**! Damit haben wir aber wieder ein wahres Zauberkunststück vollbracht, denn das so schon einmal geschnittene Band kann nun durch einen weiteren, ebenfalls etwa in der Mitte geführten Schnitt in zwei getrennte Teile, die zwar ineinander geschlungen sind (wie Kettenglieder), zerschnitten werden. Dieses Doppelband ist jedoch wieder unzerschneidbar, das heißt, die zwei Einzelteile werden neuerlich nur **länger**, wenn man sie durchschneidet. Erst beim vierten Schnitt zerfallen wieder die Geschnittenen in zwei Teile, so dass jetzt wieder vier Bänder entstehen,



Das Möbiussche Band
Ein verblüffendes Experiment



Das Möbiussche Band, zweimal durchschnitten

und so fort, Das hätte man von einem so einfachen Ding wie von einer Papierschleife gewiss nicht erwartet. Man versuche es nur einmal!

Rein mathematisch wollen wir noch nachtragen, dass das Möbiussche Band sehr gut als „gekrümmter Raum", nämlich als gekrümmter R_2, gelten kann. Räume mit so überraschenden Eigenschaften, wie wir sie hier gefunden haben, nennt man „**nichtorientierbare Räume**". Natürlich sind auch geschlossene nichtorientierbare dreidimensionale Räume möglich, das heißt mathematisch konstruierbar. Aber genau so, wie das Möbiussche Band, an sich ein R_2 erst in der nächsthöheren Dimension, nämlich im R_3, hergestellt und eingebettet sein muss, so ist es auch notwendig, dass ein gekrümmter, dreidimensionaler R_3 in der nächsthöheren Dimension, im R_4 also, entstanden und eingebettet sein müsste.

Dem nachdenkenden Leser wird jetzt doch wohl unheimlich zumute werden, denn wir fühlen, dass alle unsere Vorstellungen von Sein und Welt urplötzlich ins Wanken geraten und das scheinbar so festgefügte Gebäude unserer grundlegenden Anschauungen in allen Fugen zu krachen beginnt, wie ein Haus, das baufällig wird, weil seine Fundamente bersten.

Aber wir wollen bei der Stange bleiben und uns durchringen, um im Schlussabschnitt dieses Buches durch alles Grauen hindurch, das auch das wissenschaftlich exakt gemalte Bild höherer Räume in uns auslösen muss, Einblicke zu erhalten, die wohl zu den großartigsten gehören, die uns überhaupt zugänglich sind.

Wo wir den Hebel ansetzen müssen, um weiterzukommen, ist klar. Wir müssen unser Märchen, das wir in diesem Abschnitt am R_2 gesponnen haben, auf den R_3, also auf unsere Welt, übertragen. Dazu ist vor allem notwendig, den R_4 kennen zu lernen, aus dem heraus allein ein Blick auf unsere Welt möglich ist.

Wir werden also jetzt selbst zum Spielzeug, wie vorhin die Flachländer, und ein unvorstellbar höher und mächtiger organisiertes Wesen, als wir es sind, ein Experimentator im R_4, führt nun die Regie.



Die Schrecken der vierten Dimension

Vierte Dimension! — Ein Wort, abgegriffen wie eine alte Münze! Ein jeder hat es in irgendeinem Zusammenhang schon einmal gehört. Etwas unbestimmt Unheimliches verknüpft sich damit, denn in der vierten Dimension sind, wie schon unser trefflicher alter Wilhelm Busch spottet, Geister und Gespenster zu Hause.

Wie kläglich und albern aber alles ist, was Spiritismus und Okkultismus von der berüchtigten vierten Dimension erzählen, erhellt am besten aus der kühlen, kristallklaren Sachlichkeit, welche die Ergebnisse der Mathematik und der Geometrie auch hier von dem an sich Unvorstellbaren verkünden[1].

Die Sache ist leicht zu erklären. Wir greifen dazu auf unsere Thermometerskala und auf die verschiedenen Koordinatensysteme zurück. Auf der Skala ist ein Punkt durch eine einzige Angabe, zum Beispiel durch: „Der Punkt befindet sich bei + 3,42°“, eindeutig bestimmt. Im ebenen Koordinatensystem, das wir in seiner Urform aus zwei rechtwinklig gekreuzten Skalen erhalten haben, brauchten wir, entsprechend den beiden Achsen, nämlich der x- und y-Achse, zwei Angaben. Etwa: „Der Punkt befindet sich bei $x = +4$ und $y = +3$.“

Nun käme unser dreidimensionales Koordinatensystem, das wir beim Fisch im Aquarium kennen lernten. Dort brauchten wir schon, den drei räumlichen Ausdehnungen entsprechend, drei Angaben, wie die:

„Fisch steht mit dem Maul bei x = + 5; y = + 15 und z = + 21.“ Auf der Geraden ist also ein Punkt durch eine einzige Angabe gegeben, in der Fläche durch zwei, im Raum durch drei.

Nun kommt der Sprung. Stellt man sich einen Raum vor, in dem es nicht nur drei, sondern vier verschiedene, aufeinander senkrecht stehende Richtungen gibt, so wird eine vierte Angabe zur Festlegung eines Punktes in diesem Raum notwendig sein; also zum Beispiel x, y, z und w.

Jetzt springt einer unserer gefährlichsten Gegner, nämlich der sogenannte „gesunde Menschenverstand“, auf und ruft: „Halt! Das Ganze ist ja Unsinn! In unserer Welt ist ein Raum mit vier Abmessungen überhaupt nicht möglich. Wie soll eine vierte Achse auf den drei anderen senkrecht stehen können? Wir haben einfach keinen Platz für eine vierte Richtung,

---

[1] Um den Leser vor eigenen, sicher fehlgehenden Spekulationen zu warnen, sei hier angedeutet, wie ungemein viel gerade über dieses Thema von den großartigsten Köpfen der Menschheit schon nachgedacht worden ist. Der erste, dem die Idee eines höheren Raumes sicher schon vorschwebte, war Plato. Dann finden wir die wahrhaft königlichen Denker Kant, Gauß, Helmholtz als grundlegende Mitarbeiter in diesem schwierigen Bereich. Faßt man alles das zusammen, was darüber geschrieben wurde, so läßt sich leicht eine Bücherei von mindestens 100 Bänden zusammenstellen, in der nur die hier gestreiften Fragen behandelt werden.

für eine vierte Ausdehnung. Alles bei uns hat Breite, Länge und Tiefe (Höhe). Mehr ist nicht möglich, einfach deswegen nicht, weil es eben nicht geht! Jeder Gedanke daran ist daher Widersinn oder aufgelegter Betrug !“

Es besteht kein Zweifel, die meisten unserer Leser werden sich — selbst nach dem, was sie von den wunderlichen Möglichkeiten gekrümmter niederer Räume gehört haben — aus vollster Überzeugung dieser Meinung anschließen. Die Einwendungen sehen ja geradezu unerschütterlich aus, Aber der Schein trügt wieder einmal! In Wirklichkeit lassen sich alle diese Einwände zerpflücken. Tun wir es!

Das Wort „unmöglich“ hat, wie zahllose Beispiele zeigen, in der ganzen Menschheitsgeschichte nur relative, vielleicht sogar nur zeitlich begrenzte Geltung, wie bei einer Münze, die jahrzehntelang im Umlauf ist und dann plötzlich Gültigkeit und Wert verliert. Ja, es ist vielleicht richtig, dass es dem Menschen **überhaupt nicht zusteht**, entscheiden zu können, was möglich oder unmöglich ist.

Gehen wir nur etwa drei Jahrhunderte zurück Für **Galilei** war ein flächenhaft erscheinender großer Stern, der, wie Jupiter, selbst wieder von kleineren Sternchen, den eigenen Monden, umgeben ist, eine glatte Denkunmöglichkeit, bevor er das nicht wirklich durch sein erstes Fernrohr gesehen hatte. **Ptolemäus**, **Kopernikus**, **Tycho Brahe**, die alle kundige Astronomen waren, das Fernrohr aber noch nicht kannten, hätten unbedingt jedem ihr „Unmöglich“ entgegenhalten, der behauptet hätte, der herrliche „glücksbringende“ Planet sei kein durchmesserloses Lichtfünklein, sondern eine als Scheibe sichtbare Kugel, die von Monden umgeben ist. Für den genialen Übermenschen **Leonardo da Vinci** war eine Masse von 600 t Gewicht, die sich dauernd mit 100 bis 120 km Stundengeschwindigkeit fortbewegen und dabei zahllose Menschen mit sich führen könnte, einfach ein niemals zu verwirklichendes Hirngespinst. Und was wohl hätte **Goethe** jemandem geantwortet, der ihm prophezeit hätte, dass man hundert Jahre nach seinem Tode die Menschenstimme mit allen Klangfarben und Tönen über Ozeanweiten vernehmen werde? Strahlen, für die unser Auge blind ist und die doch undurchsichtigen Stoff durchdringen, wagte kein Zukunftsromanschriftsteller zu erfinden, bevor sie nicht wirklich entdeckt waren. Ins Unermessene könnten wir diese Beispiele fortsetzen. Aber ich glaube, der sehr beschränkte Wert der Aussagen „Das gibt es nicht! Das ist unmöglich!“ ist damit schon hinreichend erwiesen.

Ein anderer Einwand lautet, dass in unserem Raum kein Platz mehr für eine vierte Richtung, die vierte w-Achse wäre. Aber auch diese Behauptung ist unmöglich aufrechtzuerhalten! Denken wir nur an unsere Flachländer! In ihrer Flächenwelt ist allerdings nicht der geringste Platz für eine dritte Abmessung, für die Dicke oder Höhe. Es ist für sie undenkbar, dass etwas „hoch“ oder „dick“ sein könnte. Und doch waren sie vorhin wunderschön in unserem dreidimensionalen R_3 eingebettet, mitsamt ihrer ganzen endlichen Welt. Warum können wir nicht auch mit unserer endlichen R_3-Welt in irgendeinem R_4, sogar vielleicht in einem R_5 oder in irgendeinem meinetwegen R_{17} eingebettet sein? Weil einfach kein Platz ist? Da wohnt ein armer Student in engster Dachkammer. Es ist nicht denkbar, dass man in seiner räumlich so beschränkten „Bude“ etwa noch ein Klavier unterbrächte. Darf der Studiosus daraus schließen, dass es keine umfangreichen Konzertflügel gäbe? Nein! Denn dann wäre er genau so unklug, wie einer, der die Möglichkeit einer vierten Dimension leugnet, weil für sie in unserem R_3 kein Platz mehr wäre! Und dass man noch nie einen vierdimensionalen Raum, einen vierdimensionalen — etwa in cm^4 zu messenden — Körper gesehen hat? Nun, einen ganzen Planeten, nämlich den Pluto, hat es bis vor wenigen Jahren auch nicht gegeben, weil ihn bis dahin noch niemand gesehen hatte. Aber schließlich wurde er doch entdeckt. Und wer heute etwa behaupten wollte, dass es keine freilebenden Tiger gäbe, einfach weil ihm noch

niemals ein solcher in unserer Landschaft begegnet ist, kann nicht ernst genommen werden. Schließlich hat einen wirklichen Punkt, eine wirkliche Gerade noch keines Menschen Auge sehen können; denn sie sind vollständig unsichtbar für unser rein dreidimensional orientiertes Auge. Was in einer Richtung überhaupt keine Abmessung hat, können wir eben nicht wahrnehmen, ebenso wenig wie wir imstande sind, vom Berggipfel aus eine im Tal irgendwo liegende Zeitung zu entziffern. Dennoch sprechen und denken wir im gewöhnlichen bürgerlichen Leben tagtäglich von Punkten und Geraden, von völlig unsichtbaren Dingen also, die wir obendrein nur mit Mühe definieren können!

Was sagt denn nun aber die Mathematik dazu? Und das ist es eben! Die beiden Geschwister Mathematik und Geometrie sind gewissermaßen längst übereingekommen, diese Möglichkeiten einfach und unwiderruflich zu **bejahen** ! Ein R_4, ein R_5, ein R_6 und so fort sind durchaus denkbar.

Jetzt drängt sich eine Reihe wichtiger Fragen auf, die eigentlich in eine zusammengefasst werden können: **Was wissen wir Gesichertes** von der vierten Dimension? — Der Leser wird nun fürchten, wir würden wieder so oder so herum auskneifen und wieder nur Unbestimmtes vorbringen. Dem ist aber nicht so. Wir kennen sogar eine ganze Menge überraschender Einzelheiten von den spukhaften Wundern der vierten Dimension.

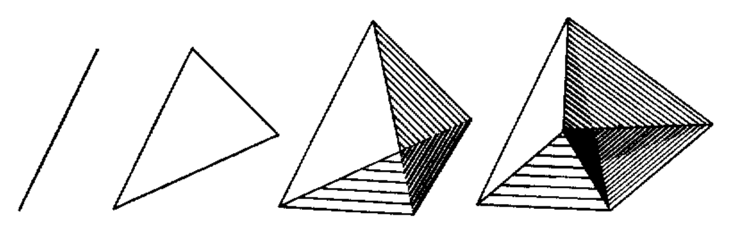
Fangen wir wieder ganz sachlich und elementar an, indem wir die geometrischen Gebilde untersuchen, die wir in den einzelnen Räumen konstruieren können. Dabei wollen wir auch den Punkt, die Gerade und die Ebene als „Raum“ betrachten und sprechen also z. B. vom nulldimensionalen Raum R_0, wenn wir den Punkt meinen und so fort. Wie das zu verstehen ist, dürfte klar sein. Für unseren Flachländer ist der zweidimensionale R_2, die Ebene, sein Lebensraum, also durchaus ein Raum.

Damit uns aber die ganze Sache nicht zu schwierig und unübersichtlich wird, greifen wir uns die sogenannten **regelmäßigen Körper** bzw. Vielecke heraus. Das sind also die geometrischen Gebilde, die besonders einfach aufgebaut sind. So sind z. B. in der Ebene das gleichseitige Dreieck, das Quadrat, das regelmäßige Fünfeck, das regelmäßige Sechseck und so fort — um nur einige der regelmäßigen Vielecke zu nennen — derartige Gebilde. Unter diesen beschränken wir uns natürlich auf die jeweils einfachsten, die überhaupt möglich sind.

In der „nullten Dimension“, im R_0 im „Punkt“, ergibt sich die eigenartige Feststellung, dass dort der Punkt selbst das einfachste Gebilde ist. Nicht viel anders ist es bei der Geraden, also in der „ersten Dimension“, im R_1; denn da ist der von zwei Punkten begrenzte Teil der Geraden — die Strecke — das einfachste Gebilde. Interessanter wird die Sache schon in der Fläche, im R_2, also auf unserer Zeichenebene. Hier gilt als einfachstes Gebilde das gleichseitige Dreieck. Und nun zu unserem dreidimensionalen Raum: Im R_3 ist der von den wenigsten gleichseitigen Dreiecken begrenzte Körper eine Pyramide, deren Grundfläche also ein gleichseitiges Dreieck ist und deren drei Seitenflächen genau so große (kongruente) gleichseitige Dreiecke bilden. Man nennt diesen einfachsten Körper das **Tetraeder**. Alle genannten einfachen Gebilde tragen die Bezeichnung „**Simplex**“ ihrer Dimension. Der Punkt ist also Simplex des R_0, das gleichseitige Dreieck das Simplex des R_2 und so fort. Fragen wir nun, wie das Simplex der vierten Dimension aussehen mag.

Dazu ist noch zu bemerken: In der Ebene gibt es bekanntlich unendlich viele regelmäßige Vielecke oder — wie wir in unserem Zusammenhang sagen können — R_2-Körper.

In unserem R_3 gibt es fünf regelmäßige Körper[1]): das Tetraeder, das Hexaeder (oder Würfel), das Oktaeder, das Dodekaeder und das Ikosaeder.



Die einfachen Gebilde (Simplex).
Strecke (R_1), gleichseitiges Dreieck (R_2), Tetraeder (R_3), Fünfzell (R_4)

Im vierdimensionalen Raum gibt es sechs regelmäßige Körper, von denen einer unserem biederen dreidimensionalen Tetraeder entspricht. Wie sieht dieses Simplex nun aus? Wir müssen hier den Leser auf die furchtbare Katastrophe aufmerksam machen, die jetzt über unser ganzes Denken und über unsere Vorstellung vom Weltaufbau und seinen Möglichkeiten hereinbricht. Das durch Bersten seiner Fundamente baufällig gewordene Gebäude stürzt nun hoffnungslos ein.

Das Unglück beginnt eigentlich schon mit der Feststellung, dass alle vierdimensionalen Körper nicht mehr von Flächen, sondern von Räumen begrenzt werden. Nachdenken, vergleichen: Auf der Ebene wird jedes Gebilde, das heißt der betreffende R_2-Körper, von Geraden oder Linien begrenzt, im R_3, also in unserem Raum, von Gebilden, die um eine Dimension, um eine Ausdehnung höher sind, also durch **Flächen**. Und ebenso muss im R_4 jeder Körper von dreidimensionalen **Körpern** begrenzt und umschlossen werden. Wir sprechen von unseren Körpern auch mitunter als Flächnern, weil sie von so und so viel Flächen begrenzt werden. Das Tetraeder zum Beispiel ist bei uns ein Vierflächner, der Würfel ein Sechsflächner und so fort. Sinngemäß muss man also in der vierten Dimension von „Körpern“ reden; ein hässliches Wort, das man durch die Verwendung des Ausdrucks „Zell“ (von Zelle = körperlicher Raum) vermieden hat. So wird aus unserem Tetraeder im R_4 ein sogenanntes Fünfzell, ein Gebilde also, das 5 Ecken, 10 Kanten, 10 gleichseitige Dreiecke und 5 Seiten-Tetraeder als Grenzumhüllung hat. Genau so entspricht unserem dicken Würfel im R_4 das Achtzell, ein Gebilde, das 16 Ecken, 32 Kanten, 48 Quadrate und 8 Würfel aufweist.

Wir wollen einmal ein Fünfzell oder Achtzell sehen, denn man muss es doch irgendwie aufzeichnen können. Oder versagt am Ende auch schon die darstellende Geometrie? — Ja und nein, wie man’s nimmt! Zunächst muss nämlich festgestellt werden, dass unsere rein „dreidimensionale“ Seele wie unsere rein „dreidimensional“ orientierten Augen vollkommen blind und unfähig sind, Vierdimensionales auch nur zu erkennen.

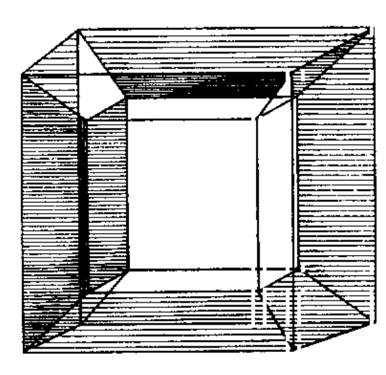
An der Grenze des R_3 ist die Welt für uns gleichsam mit Brettern vernagelt. Die besten Gehirne haben sich beim Versuch, Vierdimensionales zu denken, glatt zuschanden gedacht. **Kant**, einer der tiefsten Denker der Welt, führt die Unmöglichkeit, sich einen Raum von mehr als drei Abmessungen vorstellen zu können, auf die Organisation unserer Seele zurück. **Gauß** betrachtet die drei Dimensionen des Raumes als eine spezifische Eigentümlichkeit der Seele. **Helmholtz** bekennt offen: „Ein Vorstellen des R_4 ist unmöglich, ebenso wie ein von Jugend

[1]) Diese Körper spielen u. a. als Kristallformen in der Mineralogie und Chemie eine Rolle.

auf Blinder sich die Farben nicht vorstellen kann, wenn man ihm auch eine begriffliche Beschreibung derselben geben könnte.“

Trotzdem gibt es Abbildungen vierdimensionaler Körper. Wir wollen am Beispiel der Darstellung unseres Fünfzells sehen, wie sie zustande kommen. Wir nehmen außerhalb des dreidimensionalen Tetraeders einen Punkt an, welcher — auch in der Annahme — der vierten Dimension angehört, in der vierten Raumabmessung liegt. Von ihm aus ziehen wir die Verbindungsgeraden zu den Eckpunkten des dreidimensionalen Tetraeders. So ähnlich macht man es auch mit dem Würfel. Was dabei herauskommt, zeigt unsere Abbildung.

Natürlich wird der Leser aus dem Betrachten der Abbildungen **nicht** klug werden. Aber es geht jedem anderen auch so! Außerdem können diese „Bilder“ überhaupt nicht an das Aussehen der vierdimensionalen Körper herankommen. Untersucht man das genauer, so stellt sich folgende schrullige Verschrobenheit heraus:



Vierdimensionaler Würfel

Jedes ebene Bild, also eine Zeichnung, ein Photo, ist zweidimensional, hat um eine Dimension weniger als der dargestellte räumliche R_3-Körper. Wenn wir also eine Lokomotive photographieren, so unterschlagen wir dabei nur eine einzige Dimension, etwa die Raumtiefe. Bilden wir aber ebenso einen vierdimensionalen Körper auf dem Papier ab, so kommen gleich **zwei** Dimensionen in Wegfall, nämlich die vorhin erwähnte Raumtiefe und die Ausdehnung des vierdimensionalen Gebildes in der vierten Richtung. Ziehen wir von einer dreidimensionalen Lokomotive zwei Dimensionen ab, so kommen wir auf ein eindimensionales Gebilde als Bild, also auf eine Gerade! Wenn ich mich demnach mit meinem Freund an den Tisch setze, einen, sagen wir, 4 cm langen Strich aufs Papier ziehe und dann erkläre: „Siehst du, so sieht die neue Hochleistungslokomotive der Bundesbahn aus!“ so habe ich dem jetzt jedenfalls verblüfft Dreinschauenden von der neuen Maschinenkonstruktion genau soviel erzählt wie unsere Abbildungen von den vierdimensionalen Körpern! Ein verzweifelter Fall; denn klarerweise kann ein gerader aufs Papier gezeichneter Strich jeden dreidimensionalen Körper versinnbildlichen: eine Kuh oder einen Kirchturm, eine Lokomotive oder eine Schwiegermutter, ein Fußballmatch oder einen Hochgebirgsgipfel …

Und vollkommen hilflos sind wir bestimmten vierdimensionalen Körpern gegenüber, zu deren noch so vereinfachter Darstellung wir nicht einmal den Bleistift in die Hand nehmen können. So ist zum Beispiel die **vierdimensionale Kugel** mathematisch ohne weiteres möglich. Sie ist begrenzt durch einen krummen dreidimensionalen Raum, der am einfachsten als geometrischer Ort aller derjenigen Punkte des R_4 erklärt wird, die von einem bestimmten Mittelpunkt den gleichen Abstand haben. Bei uns im R_3 ist dieser geometrische Ort natürlich eine Fläche, genau so wie im R_2, auf der Ebene, dieser geometrische Abstand ein Kreis, eine Linie ist. Im R_4 aber ist die Gesamtheit aller Punkte, die von einem Punkt den gleichen Abstand haben, gleich ein dreidimensionaler **Raum** Das ist schon ein unheimlicher Spuk! Aber weiter! Der Rauminhalt einer gewöhnlichen, dreidimensionalen Kugel ist bekanntlich $V = \frac{3}{4}\pi\, r^3$, die Oberfläche O = 4 $\pi\, r^2$. Schön! Bei der vierdimensionalen Kugel aber ist das Volumen $V = \frac{1}{2}\pi^2\, r^4$ und die Oberfläche O = 2 $\pi^2\, r^3$. Und mit Zähneklappern müssen wir eine neue Gespenstererscheinung zur Kenntnis nehmen: Eine der drei „Unheimlichen“, die

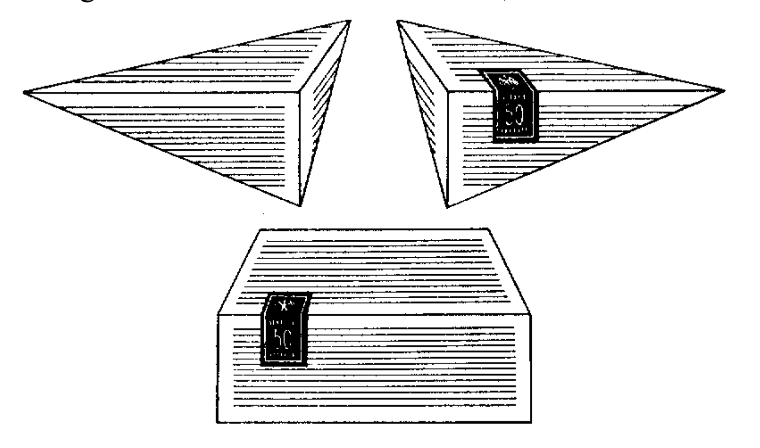
berühmte Ludolfsche Zahl, ist uns zwar in das Geisterreich des Vierdimensionalen gefolgt, aber sie, die in der Fläche wie in unserem dreidimensionalen Raum, also in zwei Dimensionen, schön brav an ihrem allerdings transzendenten Wert von $\pi = 3{,}141\ 593\ldots$ festgehalten hat, tritt uns hier mit ihrem eigenen Quadrat entgegen, sie hat sich in der vierten Dimension mit sich selbst multipliziert.

Eine heulende Meute kleinerer mathematischer Teufel überfällt uns und trübt jeden Blick. Wie die einfachsten Überlegungen ergeben, schneiden sich zum Beispiel im R_4 ein dreidimensionaler Körper und eine Gerade in einem **Punkt**, nicht wie bei uns in einer Geraden! Auch zwei Ebenen, die sich bei uns in einer Geraden treffen können, schneiden einander im R_4 nur in einem Punkt! Eine Ebene schneidet von einem dreidimensionalen Körper im R_4 nur eine Gerade herunter! Brotschneiden ist demnach im R_4 eine kaum durchführbare Angelegenheit, denn das am Brotlaib angesetzte Messer bringt nichts — nur eine zusammenhängende Summe von Punkten, eine Gerade herunter!

Eine wahre Hölle ist los! Das Unvorstellbare kommt aber noch. Um es einigermaßen zu verstehen, müssen wir noch einmal zu unseren Flachländern zurück. Wie wir wissen, sind dort Vorgänge unmöglich, die bei uns im R_3 Selbstverständlichkeiten sind. Wir greifen auf unser Modell einer zweidimensionalen Ebene zurück und legen zwei Glasplatten so übereinander, dass der Abstand überall nur etwa 2 mm betragen möge. Diese ungefähre Annäherung an einen R_2 — er soll der Zwischenraum zwischen den beiden Glasplatten sein — genügt hier vollkommen. Nun schieben wir zwei Zeichendreiecke, die kongruent, das heißt in allen Beziehungen gleich sind, also gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, in unseren R_2. In dieser Lage können sie von den gleichfalls eingeschlossen gedachten Flachländern **nicht** zur Deckung gebracht werden, denn sie sind „seitenverkehrt“, wie bei uns etwa ein rechter und ein linker Handschuh. Die Flachländer können die Dreiecke verschieben und drehen, wie sie wollen: nie ist es möglich, die Dreiecke zur Deckung zu bringen.

Einer der wichtigsten Beweise der Kongruenz (man sagt statt „kongruent“ auch „deckungsgleich“) ist demnach im R_2 nicht zu erbringen. Vermutlich können also die Flachländer nur bestimmte Dreiecke überhaupt als „deckungsgleich“ erkennen. Die Sache wird aber sofort anders, wenn wir die obere Glasplatte abheben, so dass wir in unseren R_3 kommen. Denn jetzt ist es sofort möglich, durch einfaches Umklappen die Dreiecke so zu legen, dass sie genau aufeinander passen. Eine Selbstverständlichkeit das Ganze, nicht wahr?

Aber eine Gänsehaut läuft uns über den Rücken, wenn wir das hier Gefundene auf den R_3 und den R_4 „erhöhen“, das heißt eine Parallele, einen sinngemäßen Vergleich zu dem in niedrigeren Dimensionen Gefundenen, auf unsere höheren Räume anwenden. Auch bei uns gibt es Körper, die einander aufs Haar gleichen und doch nicht „deckungsgleich“ sind, wie die erwähnten Handschuhe, Stiefel und so fort. Es ist aber selbstverständlich, dass man diese Körper, sowie man sie in den R_4 brächte, dort durch einfaches Drehen derart umkrempeln könnte, dass sie nun einander sofort in allen Belangen und allen Punkten entsprächen. Es ist unfassbar: Vor uns liegt auf dem Tisch ein Paar

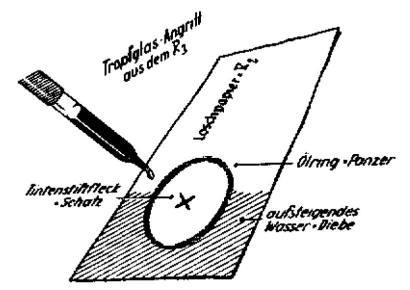


Gleiche Zigarrenkistenteile, die sich in R_3 nicht zur Deckung bringen lassen

neuer Handschuhe; da greift ein Experimentator aus dem R_4 nach dem einen. Der Handschuh verschwindet sofort auf völlig rätselhafte Weise unseren Blicken. Denn er ist im R_4, in den wir ja unter keinen Umständen hineinsehen können. Nach zwei Sekunden fällt der Handschuh wieder auf unseren Tisch — und beide Handschuhe sind, ohne dass der Verschwundene im geringsten in seinem Gefüge beschädigt worden wäre, einander völlig gleich, das heißt, es liegen jetzt zwei rechte oder zwei linke Handschuhe da. Und ebenso gut könnte der über uns wie ein Gott waltende R_4-Mann beide Handschuhe in Sekundenbruchteilen wieder in zwei andere Paare und so fort zurückverwandeln und sich dabei mächtig an unserem maßlosen Entsetzen erfreuen, welches das unerklärliche Wunder in uns auslösen müsste. Verheerend sind die weiteren Schlussfolgerungen daraus: Ein Mensch, nur auf ein paar Augenblicke in den R_4 gebracht, könnte dort durch eine einfache Drehung so „verwunden“ werden, dass er fortan das Herz auf der rechten Seite hätte. Außerdem: Der Mensch hätte im R_4 weder eine rechte noch eine linke Hand, auch keinen rechten und linken Fuß; beide wären einander gleich. Handschuhmacher und Schuster des R_4 brauchen daher nur einerlei Schuhe, Handschuhe, einerlei Stiefel zu machen, die auf Hände und Beine genau so aufgesetzt werden können wie bei uns Hüte auf den Kopf, die aber nur bezüglich der Hauptabmessungen zu stimmen brauchen, bei denen es jedoch ein Rechts und Links nicht gibt …

Es beginnt, uns schon langsam in den Ohren zu singen. Aber das Letzte, Schrecklichste kommt noch!

Wir müssen dazu erneut zu unseren Flachländern zurück. Wir nehmen — um das Experiment leicht nachmachen zu können — ihre Flächenwelt jetzt als aus Löschpapier geschaffen an. In dieser hätten die Flachländer einen großen „Schatz“, den sie natürlich vor Zugriffen zweidimensionaler Diebe, vor Wetterkatastrophen und so fort ängstlich behüten müssen. Dieser Schatz wird für uns durch einen Tintenstiftpunkt auf dem Löschpapier versinnbildlicht. Wasser, das von dem Löschpapier gierig aufgesogen wird und den Tintenstiftpunkt, falls es ihn erreicht, jäh zum Verschwimmen bringen müsste, das stelle etwa die Einbrecher vor. Wie schützen wir nun den Tintenstiftpunktschatz vor dem Angriff des im Löschpapier anwandernden Wassers? Sehr einfach: indem wir um den Punkt einen Fettring ziehen. Kommt jetzt das Wasser, so kann es nur bis an den von uns gezogenen Öl- oder Fettkreis heran. Der Tintenstiftpunkt bleibt also unbedingt trocken. Womit der Beweis erbracht ist, dass die Flachländer in ihrer Ebene einen R_2-Körper vollkommen und unerreichbar eingeschlossen haben, wenn sie nur eine geschlossene Figur um ihn ziehen. Ein Punkt, etwa der Mittelpunkt eines Kreises oder Quadrates, ist in der Ebene von dem ihn umlaufenden Linienzug eingeschlossen und unerreichbar, falls dieser unübersteigbar gemacht wird. Aber da fällt es uns wieder ein, Vorsehung zu spielen! Und mit einem wassergefüllten Tropfglas berühren wir, von **oben** aus dem R_3 kommend, den Tintenstiftpunkt-Schatz. Augenblicklich fließt er auseinander, er ist erreicht und zerstört, ohne das wir die schützende Fettringpalisade überhaupt berührt haben! Warum, wieso war das möglich? Nun, eben deswegen, weil wir in die R_2-Welt, die ja den Schatz innerhalb ihrer Möglichkeiten und Dimensionen unzugänglich eingeschlossen hatte, aus dem R_3 eingegriffen haben. Mit andern Worten: Geschlossene Gebilde des R_2, also geschlossene Linienzüge, wie Kreise, Ellipsen, Rechtecke, Dreiecke und so fort, sind in der Richtung zum R_3 hin **offen** ! Man kann in das eingeschlossene Gebiet eindringen, ohne die Grenze zu berühren.



„Angriff“ aus dem R_3

Die Schlussfolgerungen hieraus auf unseren R_3 sind geradezu vernichtend. Die letzten Trümmer unseres gesicherten Vorstellungsgutes stürzen in sich zusammen, alles, was wir noch für unerschütterlich halten konnten, liegt in Ruinen! Denn wie nicht erst lange bewiesen zu werden braucht, **stehen alle sonst im R_3 geschlossenen Körper in der Richtung gegen den R_4 hin offen da!** Und unser Experimentator aus der vierten Dimension kann in alle unsere noch so gut verschlossenen Kassen und Panzerschränke hineingreifen, ohne die Umwandung zu zerstören, ja ohne sie selbst zu berühren, indem er einfach so handelt, wie wir vorhin den vom Fettring eingeschlossenen Tintenstiftpunkt-Schatz der Flachländer durch einfaches Berühren mit dem Tropfglas, das aus dem R_3 kam, zerstörten.

Diese Feststellung ist ungefähr gleichbedeutend mit dem Ende aller Dinge, die ja nur Körper sind. Versuchen wir einmal, uns diese restlose Zerstörung auszumalen: Ein gewöhnliches Wasserglas bewahrt bei uns im R_3 den Inhalt vollständig sicher, sobald es nicht umgekippt wird. Wir bringen das Glas in den R_4 — und augenblicklich rinnt das Wasser aus, als wenn dem Glas plötzlich der Boden ausgeschlagen worden wäre. Ja selbst wenn wir eine Stahlkugel mit Wasser füllen und dann das Einfüllloch autogen verschweißen — im R_4 läuft das Wasser unhaltbar aus, ohne dass auch nur das geringste Loch in der ringsum unversehrten Stahlwand zu sehen wäre. Denn auch die Kugel — sozusagen der „geschlossenste“ Körper, den wir uns vorstellen können — steht offen gegen die vierte Dimension ... Und in einem geschlossenen Buch, dessen Seiten noch nicht aufgeschnitten sind, kann der R_4-Mann mühelos lesen!

Am allerschlimmsten ergeht es uns selbst im R_4. Auch unser Körper ist ja streng dreidimensional, also allseits nun gegen den R_3 abgeschlossen, gegen den R_4 und alle höheren Räume dagegen völlig offen. Der R_4 -Experimentator könnte demnach an allen unseren Gliedern und Organen die fabelhaftesten Operationen durchführen, er wäre für uns ein unvergleichlicher Arzt, da er in alle unsere Organe, die offen und unverhüllt vor ihm liegen, eingreifen könnte, ohne selbst unsere den ganzen Körper umhüllende Haut zu berühren!

Wir verschlucken — angenommenermaßen — versehentlich eine Stecknadel. Eine schlimme innere Wunde, ja der Tod kann die Folge sein. Allerdings können unsere Ärzte auch schon allerhand. Mit Hilfe der Röntgendurchleuchtung wird zuerst die Lage der Nadel bestimmt, dann aber muss das Messer sich einen blutigen Weg in unseren Körper bahnen, damit der verderbliche Fremdkörper entfernt werden kann. Könnten wir aber zu unserem R_4-Mann gehen, der mit uns einfach machen kann, was er will — mit einem milden Lächeln griffe er nach der Nadel, die er in uns auf den ersten Blick sieht, wie wir einen Floh auf weißem Papier; dann nähme er sie uns heraus, ohne dass wir die geringste Wunde, die geringsten Schmerzen hätten ... Freilich müssten wir uns nur vor einem hüten wie vor der Pest, nämlich vor einer Berührung mit dem vierdimensionalen Raum, denn sowie nur ein Finger von uns in diesen hineinkommt, ist es aus! Im Augenblick sind die Adern geöffnet, das Blut strömt sofort in der „offenen“ vierten Richtung aus, und wir verbluten, ohne die geringste Wunde erhalten zu haben. Und kämen wir ganz in den vierten Raum, im Nu wäre es um uns geschehen, wir brächen sterbend zusammen ...

Genau so, wie streng genommen kein zweidimensionales Gebilde[1)] in unserem R_3 vorstellbar und möglich ist, so könnten wir unter keinen Umständen im R_4 oder in irgendeinem anderen höheren Raum bestehen!

[1)] Eine hübsche, wenn auch nicht ganz überzeugende Illustration zu dem Gesagten gibt das einzige annähernd exakt zweidimensionale Gebilde, das in unserem R_3 möglich ist, nämlich das Projektionsbild. Wenn wir einen Film in den Kinoprojektor oder ein Diapositiv in einen Bildwerfer stecken, das Licht einschalten und in den leeren Raum projizieren, kommt zunächst gar nichts zustande, Erst wenn wir

Ja, es fragt sich überhaupt, ob die Materie als solche in ihrer uns bekannten Form im R_4 von Bestand sein könnte. Wieder müssen wir uns vom R_2 belehren lassen. Da gibt es mancherlei Gebilde, die in der Fläche oder in unserem R_3, von einer Unterlage gestützt, völlig fest ineinander halten. Es ist zum Beispiel klar, dass eine aus nicht geschlossenen Kettengliedern — etwa 5-Haken — bestehende Kette in einem angenäherten R_2, also etwa zwischen zwei Glasplatten eingeschlossen, durchaus einer Zugbeanspruchung Widerstand leisten wird. Frei im Raum aufgehängt, muss die Kette aber sofort in ihre Einzelglieder zerfallen, da diese ja gegen die Richtung in den R_3 hinein (also nach oben und unten) gegeneinander nicht abgestützt sind. Ähnlich muss es z. B. Puzzle-Spielen ergehen. Auch bei diesen hängen die Einzelteile, passend zurechtgeschnittene Kartonstücke, fest zusammen, solange man sie auf einer Ebene ruhen lässt. Frei im Raum gehalten, fällt natürlich das ganze Gefüge sofort auseinander. Hieraus lassen sich Rückschlüsse auf das Verhalten von Körperverbindungen, die im R_3 völlig verlässlich unter sich verbunden sind, für den R_4 ziehen. So lassen sich zum Beispiel zwei ineinandergeschlungene Ringe, die ohne Zerstörung des einen im R_3 nicht gelöst werden können, im R_4 ohne weiteres auseinandernehmen. Eine normale Kette kann demnach im R_4 nicht bestehen; sie fällt in ihre Einzelglieder auseinander. Genau so verhält es sich mit unseren Geweben und Stoffen; auch sie, im Dreidimensionalen durch die Verwindung und Verknotung der Ketten- und Schussfäden fest aneinandergehalten, müssen sich im R_4 sogleich auflösen. Dem Gefüge unseres Körpers kann es nicht viel anders ergehen. Ja, selbst ein Stück zähesten Stahls müsste sich schließlich im R_4 in merkwürdiger Weise verändern, da auch die Elementarteilchen dieser Metallmasse — in der vierten Raumrichtung frei — nicht beisammenbleiben können. Bricht einmal die unheimliche Allgewalt des R_4 oder irgendeines höheren Raumes über uns herein, so stehen wir am Ende aller Dinge, vor einer völligen Auflösung alles Vorhandenen. R_4 müsste für unsere Welt eine Art Jüngsten Gerichtes bedeuten — solvet saec'lum in favilla, heißt es im Kirchenlied („wird die Welt in Staub zerschlagen"). Die Allmacht braucht uns dazu nur in den R_4 zu versetzen — so ist es im Handumdrehen geschehen.

Noch liegen ein paar zusammenhängende Mauerreste im Schutt, in den unsere ganze Weltvorstellung durch die Anerkennung des R_4 zerschmettert wurde. Aber auch diese noch einigermaßen zusammenhaltenden Trümmer sollen völlig zerbrochen werden, damit man gleichsam den Staub und die kleingeschlagenen Bruchsteine leichter verladen und wegführen kann. — Zum letzten Male kehren wir zu unseren Flachwesen zurück. Nur nehmen wir jetzt ihre Welt nicht aus Papier gefertigt an. — Und wieder erlauben wir uns einen „Spaß". Wir stechen mit einer weißglühend gedachten Nadel in diese R_2-Welt hinein. Natürlich werden unsere Flachländer das Licht und die Wärmestrahlung sofort wahrnehmen und auch das Gebilde sehen, von dem das alles ausgeht. Aber wie? Wie wir schon wissen, ist es ihnen nicht möglich, in den R_3 hinauszuschauen. Sie können nur das wahrnehmen, was innerhalb ihres ist. Also sehen sie von dem glühenden Eisenzylinder, den unsere Stricknadel geometrisch vorstellt, nur einen Kreis, und zwar den Kreis, den die Schnittebene des R_2 aus dem Stahlzylinder herausschneidet. Eigentlich sehen sie nicht einmal den Kreis selbst, sondern nur eine Gerade, eine Strecke, da sie ja den Kreis genau aus der Richtung seiner Ebene betrachten müssen. Da diese Strecke aber von allen Seiten gesehen gleichen Durchmesser hat, können sie leicht darauf schließen, dass es ein Kreis sein muss. Und froh jubeln die Flachländer: „Ein Kreis ist uns aufgegangen und strahlt Wärme und Licht auf uns herab!"

---

eine (natürlich körperliche, das heißt als Körpergrenze auftretende) Ebene in den Strahlengang halten, entsteht ein klares und deutliches Bild. Sowie wir aber diesem Bilde Gelegenheit geben, körperlich, zu entstehen, auch eine Tiefe zu haben, was etwa durch Projektion in eine Glaswanne mit halbtrüber Flüssigkeit (Milch, sehr stark gewässert) geschehen könnte, verschwimmt es, fließt auseinander und wird undeutlich.

Wir dagegen sitzen im R_3 und können ebenso wenig wie die Flachländer in Richtung zum R_4, also nach der vierten Raumrichtung, sehen. Da nun greift unser gottähnlicher R_4-Experimentator zu einem riesenhaften strahlenden R_4-Körper und hält ihn so, dass ein Teil von ihm in unseren R_3 hineinleuchtet. Und wie im R_2 die Schnittfigur des Zylinders ein Kreis war, so ergibt sich für uns jetzt als Schnittkörper des vierdimensionalen Körpers mit unserem Raum — eine **Kugel**. Wie die Flachländer jubeln wir jetzt: „Wie herrlich strahlt die **Sonnenkugel** Wärme und Licht auf uns herab!“

Niemand zwingt uns, und keine Wissenschaft verlangt es, dass wir die Sonne und andere Gestirne als Schnittkörper von vierdimensionalen Körpern auffassen, die in unseren Raum hineinragen. Wir nehmen einfach an, dass Sonne, Mond und so fort normale dreidimensionale Kugelkörper sind, ohne auf eine Denk- oder Vorstellungsschwierigkeit zu stoßen.

Das Erschreckende liegt vielmehr darin: Fasst man die Gestirne als Folgeerscheinung vierdimensionaler Gebilde auf, so haben wir nicht den Schimmer eines Beweises, der uns bestätigen könnte: Das ist ganz und gar unmöglich! So kann es nicht sein! Wirklich: Auch die letzten Trümmerstücke unserer Erkenntnis, die wir felsenfest gesichert glaubten, sind nichts als Stab, ein Haufen unbrauchbarer Bruchstücke ...

Ausklang

Wir sind am Ende. Nichts ist uns eigentlich geblieben als Grauen und Entsetzen. Wie durch den Spalt eines Vorhanges hat unser geistiges Auge einen Blick in das Arsenal der Allmacht, in die Werkstatt Gottes tun dürfen; die kühlste und sachlichste aller Wissenschaften erlaubte uns für ein paar Augenblicke zu ahnen, was Menschenaugen überhaupt nie erblicken können.

In uns aber fiebert eiskalter Schreck, uns würgt verzweifelnde Angst vor dieser Vision. Und es ist verständlich, wenn der Leser hier noch einmal fragt: Ja, gibt es denn derart Fürchterliches? Oder ist es nur ein toller geometrischer Spuk, das Zerrbild einer Wissenschaft, die wir ins Maßlose überspitzt und übertrieben haben? Führt das Gedankenspiel mit dem R_4 nicht geradeswegs zum Wahnsinn? Wer schützt uns denn vor dem schließlich jeden Augenblick möglichen Einbruch der vierten Dimension?

Es lässt sich darauf mancherlei erwidern. Beginnen wir mit der Antwort auf die letzte Frage: „Nur die Allmacht, die uns in den R_3 versetzte, uns und unsere Welt durchweg körperlich-dreidimensional ausbildete, kann uns auch vor allen anderen Möglichkeiten schützen! Es bleibt uns also angesichts des R_4 wirklich nichts anderes übrig, als Gott anzuerkennen — aus seiner Allmacht! Und das ist nicht die schlechteste Weisheit, zu der uns unser Spaziergang hinführen konnte. Nun noch einmal das Problem, ob es eine vierdimensionale Welt, einen R_4 überhaupt „geben“ könne. Wo wir die Antwort auf diese Frage suchen können, leuchtet ein: im Weltenraum, also im Bereiche der Astronomie, richtiger gesagt der Astrophysik. Und alles läuft schließlich auf die Frage nach der Beschaffenheit unseres Weltenraums hinaus. Doch da erleben wir eine große Überraschung. So sehr auch die Meinungen auseinander gehen, so umstritten noch der ganze Fragenbereich ist — eines kann nicht geleugnet werden: Die Wahrscheinlichkeit, dass uns eine höhere Dimension umgibt, dass wir in einem höheren Raum, als es ein R_3 ist, „eingebettet“ sind, ist **größer** als diejenige der Annahme, wir befänden uns in einem geraden, also euklidisch unendlichen Raum, wie wir ihn uns gewöhnlich vorstellen.

Ganz kurz sei hier der Gedankengang verraten, der zu diesem merkwürdigen Ergebnis geführt hat. Stellen wir uns nämlich den Weltenraum als gerade, dreidimensional und unendlich vor, so stoßen wir auf unlösbare Widersprüche, die sich zu dem beinahe komisch anmutenden Satze zusammenfassen lassen: Ist es so, wie wir annehmen, dass es ist, so kann es nicht so sein, wie es ist!

Die Berechtigung dieser „sophistischen“ Wort- und Satzverdrehung erhellt aus folgendem: In einem unendlichen Weltall, das irgendwie doch immer wieder mit lichtausstrahlenden Sternen besetzt ist, gerät man in hoffnungslose Widersprüche. Da in diesem Fall eine volle Unendlichkeit von Sternen vorhanden sein muss, ist die Nacht als solche überhaupt nicht denkbar. Die ganze scheinbare Himmelskugel müsste von lückenlos aneinandergereihten Sternen nur so blitzen und funkeln, so hell und strahlend, dass Mond und Planeten sich als dunkle Scheiben vor dem lichterfüllten Hintergrund abheben müssten. Ebenso wäre jede Wirkung der Schwerkraft undenkbar; denn die Unendlichkeit der in alle Unendlichkeit verteilten Sterne würde die Anziehung der Erde, die der Sonne und so fort einfach aufheben. Unser ganzes Sonnensystem könnte demnach nicht eine Minute beisammen bleiben, da das gemeinsame Band, die gegenseitige Massenanziehung, ebenfalls fehlte. Und beschränkt man sich auf endlich viele Sterne, die in einer Kugel von endlichem Radius eingeschlossen sind, so bleibt wieder die höchst unbefriedigende Gedankenschwierigkeit, dass man dann auf eine Zusammenballung von Welten kommt, hinter der ringsum im Raum nichts mehr ist.

Man weicht dem allem aus, wenn man eine Krümmung des Raumes annimmt. Der Raum ist dann nicht mehr unendlich, sondern gekrümmt, er kehrt wie eine geschlossene Kurve in sich selbst zurück. Das ist natürlich schwer vorstellbar, hilft aber über die genannten und andere Denkschwierigkeiten hinweg.

Die unmittelbare Folge jeder Raumkrümmung ist aber die Voraussetzung des Vorhandenseins einer höheren Dimension !

Wie ein gekrümmtes Blech in eine flach zusammenklappbare Mappe nicht mehr hineingelegt werden kann, so hat auch ein gekrümmter R_3 nicht mehr im ebenen R_3 Platz, er muss mindestens in einem R_4, wenn nicht in einem R_5 oder R_6 „eingebettet" ruhen.

Noch tobt um dieses Problem der erbitterte Kampf der Meinungen. Es gibt rund ein Dutzend verschiedener Weltraumtheorien, darunter solche, welche die Schrecken der hier kurz geschilderten vierten Dimension noch um ein bedeutendes übertreffen. So verhält sich zum Beispiel im gekrümmten elliptischen Raum das Geheimnis der Seitenvertauschung zwangsläufig genau so wie auf unserem Möbiusschen Bande. Dann gibt es sogenannte Raumzeitwelten, in denen die tollsten Unmöglichkeiten an der Tagesordnung sind. Es gibt Welten, in denen der Raum in den Raum zurückkehrt, in denen man also seinen eigenen Hinterkopf schauen kann. Geradezu entsetzenerregend ist aber dann noch das mögliche „Gekrümmtsein" und Wiederinsichhineinlaufen der **Zeit**, denn in einer derartig organisierten Welt kehrt die Zeit immer wieder an dieselben „Punkte" zurück. Alles Geschehen wiederholt sich stets von neuem — wenn auch nach Ablauf unvorstellbar langer Zeiträume, die nach Trillionen und Quadrillionen von Jahren bemessen werden. Nähme man eine derartige „Weltorganisation" an, so würde Sokrates nochmals auf der Agora zu Athen lehren, Cäsar noch einmal von Brutus ermordet, Amerika erneut entdeckt werden. Und nicht nur einmal müsste sich das alles wiederholen, nein, immer und immer wieder!

Die unmittelbare Folge daraus aber wäre, dass alles, was überhaupt geschieht, zwangsläufig geschehen müsste, seit Uranfang vorbestimmt ist !

So wirft denn auch die Zeit, als Dimension aufgefasst, alle unsere Vorstellungen glatt um, sowie wir auch nur in Gedanken, mit ihr herumzuexperimentieren versuchen.

Ob man das alles überhaupt ausdenken darf und glauben soll? Das ist sozusagen Geschmackssache! Alle diese Theorien stehen mit keiner der mathematischen Möglichkeiten in Widerspruch, keine ist mit den vorhandenen, beobachteten Tatsachen ohne weiteres unvereinbar. Keine allerdings lässt sich auch beweisen, wenigstens nicht in dem Sinne, dass man sagen könnte: So ist es und nicht anders!

Angesichts dieser Tatsachen und Möglichkeiten bleibt uns nichts übrig, als stillergeben uns damit abzufinden. Das folgerichtige Weiterspinnen einmal gefasster und als bewiesen anerkannter Gedanken hat alles, was wir uns vorstellen konnten und vorstellen durften, in Trümmer gelegt; unsere Vorstellungen selbst sind gewissermaßen über uns hergefallen und haben uns auf die Knie gezwungen.

Und so bleibt uns nicht viel mehr übrig, als mit Schillers erhabenen Zeilen zu schließen, die er, von der Unmöglichkeit niedergeschmettert, auch die uns schon „schlicht“ vorkommende Unendlichkeit des geraden, euklidischen Raumes, zu erkennen, gefunden hat:

> Senke nieder,
> Adlergedank’, dein Gefieder!
> Kühne Seglerin, Phantasie,
> Wirf ein mutloses Anker hie!